物理学IA —問題練習プリント1

担当者／山本明

1　力を図示すること

力の矢印を描き入れる練習をしよう!

問題 [1] 飛行中の物体

地表付近[1]を質量 m の物体が、速度 v で水平方向に移動している。このとき、この物体に掛かっている力の矢印を描け。また力の大きさも求めよ。

問題 [2] 黒板にくっついた磁石

質量 m の磁石が、黒板に張り付いている。磁石と黒板が引きつけ合う力の強さを F とする。黒板の静止摩擦係数を μ して、磁石に働いている力の矢印を描き、力の大きさも求めよ。(必要に応じて、新しい変数を定義してよい)

また、この磁石が黒板からずり落ちない条件を求めよ。

問題 [3] 重ねられた物体1

質量 m の小さい箱が、質量 M の大きい箱の上に乗っている。これらが机の上に置かれて、静止している。そのとき次の問いに答えよ。なおこの状況は地表付近 (重力が mg と書ける辺り) で考えている。

(1) 小さい箱にかかる力を全て図示せよ。また力の大きさも求めよ。
(2) 大きい箱にかかる力を全て図示せよ。また力の大きさも求めよ。

問題 [4] 重ねられた物体2 –秤の目盛り

質量 m の小さい箱が、質量 M の大きい箱の上に乗っている。これらが秤の上に置かれて、静止している。この状況は地表付近 (重力が mg と書ける辺り) で考えているとして、この秤はどんな数字を指すか、答えよ。

ただし秤の指す数字とは、秤が上から押されている力を g で割り算した数字である。

[1] 重力定数を g として質量 m の物体にかかる重力が mg と表せるとする。

問題 [5] 重ねられた物体 3 –下の箱を引っ張る

質量 m の小さい箱が、質量 M の大きい箱の上に乗っている。これらを机の上に置き、下の大きい箱に紐を付けて水平に引っ張ったところ、小さい箱を乗せたまま大きい箱は動き始めた。

机の動摩擦係数を μ' として、水平に引っ張った力の大きさは F とする。

次の問いに答えよ。なおこの状況は地表付近 (重力が mg と書ける辺り) で考えている。

(1) 小さい箱にかかる力を全て図示せよ。また力の大きさも求めよ。
(2) 大きい箱にかかる力を全て図示せよ。また力の大きさも求めよ。
(3) 2 つの箱が同じ速度で動き始めるには、なんらかの条件が必要になる。それはどんな条件だろうか?

問題 [6] 滑車がある状況

質量 m の人間が質量 M の台の上に乗っている。そして台には紐が結ばれていて、天井で滑車を通して、下の端を台に乗っている人が持っている。その状況で宙に浮き、静止している。台に結ばれている紐は十分に軽いものとして、質量は無視する。

(1) このとき台に掛かっている力を全て図示せよ。力の大きさも書け。ただし必要な変数は適宜、補うこと。
(2) このとき人に掛かっている力を全て図示せよ。変数の使い方は (1) と同じにすること。
(3) m と M の関係によっては、この状況を実現できない。それは m と M の間にどんな関係が成り立っているときか?

2　軌道がわかっているときに働いている力は…

Newton 方程式を用いれば、物体の軌道が分かったときにどんな力が働いているのかがわかる!

問題 [7] 円運動をしている物体

x-y 平面上を等速円運動している質点がある。つまりその質点の位置は、時間を t と書いて、

$$x = r\sin(\omega t + \phi)$$
$$y = r\cos(\omega t + \phi)$$

と書ける。ちなみに r は円軌道の半径である。ω は角速度 (単位時間あたりにどれだけ回転しているかを現す数字) であり、ϕ は時間を計り始めたときの質点の位置を現す数字である。r も ω も ϕ も適当な定数であるとする。

このとき、この質点に働いている力を求めよ。(大きさと方向を求めよ)　ただし、この質点の質量は m とする。

問題 [8] 時間の 2 乗に比例して位置が変化している物体

x 軸上を次のように運動している質点がある。つまり質点の位置は、時間を t と書いて、

$$x = kt^2 + \ell$$

と書けるものとする。ちなみに ℓ は時間を計り始めたときの質点の位置を現す数字で、適当な定数である。

このとき、この質点に働いている力を求めよ。(大きさと方向を求めよ)　なおこの質点の質量は m とする。また、この質点の速度も求めよ。

問題 [9] 一定の割合で位置が変化している物体

x 軸上を一定の速さで運動している質点がある。つまり質点の位置は、時間を t と書いて、

$$x = vt + b$$

と書けるものとする。ちなみに v は質点の速さであり、b は時間を計り始めたときの質点の位置を現す数字で、v も b も適当な定数である。

このとき、この質点に働いている力を求めよ。なおこの質点の質量は m とする。

3　微分方程式 1 –変数分離形とその応用

Newton 方程式によって、働いている力がわかったときにはその後の物体の位置が予言できる。Newton 方程式を解く力を身につけよう!

問題 [10] 微分方程式の練習

示された式の意味を考えて、解の形を予想してみよう。

(1) x で微分すると $x+2$ になる関数を一般的な形で書け。
(2) x で 1 階微分しても形を変えない関数を一般的な形で書け。
(3) 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\text{(a)}\qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$
$$\text{(b)}\qquad \frac{dy}{dx} = \sin 2x$$
$$\text{(c)}\qquad \frac{dy}{dx} = 2y$$
$$\text{(d)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -4y$$

問題 [11] 微分方程式の練習 –変数分離形

変数分離形と呼ばれるタイプの微分方程式。これの解き方はマスターしよう。次に挙げる微分方程式の一般解を求めよ。また、式の後に括弧で括られた値を初期値とする特殊解も求めよ。

$$\text{(1)}\qquad \frac{dy}{dx} = y^2 \quad (x=1\text{ のとき }y=2)$$
$$\text{(2)}\qquad \frac{dy}{dx} = 2y+1$$
$$\text{(3)}\qquad \frac{dy}{dx} = xy \quad (x=0\text{ のとき }y=3)$$
$$\text{(4)}\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 3x+2$$

問題 [12] 微分方程式の練習 –変数分離形に変形可能

変数をうまく変えると、変数分離形になるタイプ。これに気づけるようになったら、かなりの腕前。次に挙げる微分方程式の一般解を求めよ。

$$\text{(1)}\qquad x\frac{dy}{dx} = x+y$$
$$\text{(2)}\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$$

4 地表付近での物体の運動

ひとまず、ここまでの節の総まとめ。

力を図示して、Newton 方程式を立てて、その微分方程式を解きましょう。初期条件を考えて特殊解をつくれば、物体の軌道を予言できます。

問題 [13] 自由落下の問題 —空気抵抗なし

空中に質量 m の小球がある。このとき、

(1) この小球に働く力を図示せよ。(力の向きを示す矢印を描き、その大きさを矢印の隣に書け。)

(2) 小球の位置を高さを x と書くことにする。「位置の 2 階時間微分に質量を掛けたものが物体に働く力に等しい」という関係に従い、Newton 方程式を書け。

(3) (2) で求めた微分方程式の一般解を求めよ。

(4) 小球ははじめに $x = h$ の位置に静止していたとして、小球の運動を表す式を求めよ (= 位置 x, 速度 v を時間 t の関数として書き表せ)。なお、(3) で求めた一般解に初期条件を代入して、答えを求めること。

問題 [14] 自由落下の問題 —空気抵抗あり

質量 m の小球を空中で静かに手を離し、そのまま落下させる。ここでは空気抵抗が速度に比例してかかるものとする。その比例定数を k と書き、次の問題に答えよ。

(1) 落下中のこの小球に働く力を図示せよ。(力の向きを示す矢印を描き、その大きさを矢印の隣に書け。)

(2) 小球の高さを x と書くことにする。「位置の 2 階時間微分に質量を掛けたものが物体に働く力に等しい」という関係に従い、Newton 方程式を書け。

(3) (2) で求めた微分方程式の一般解を求めよ。ただし、すぐに x の一般解を求めるのは大変なので、ここでは $\dfrac{dx}{dt} = v$ と書き、v の一般解を求めるだけでよい。…もしうまく解けないならば、ヒント[2]を読んでみよう。それでもダメなら、最終ヒント[3]まで読んだらどうだろうか? (ヒント通りに考えなくても解けます)

(4) 小球ははじめに $x = h$ の位置に静止していたとする。小球の速度を表す式を求めよ (= 速度 v を時間 t の関数として書き表せ)。なお、(3) で求めた一般解に初期条件を代入して、答えを求めること。

(5) (4) と同じく、小球ははじめに $x = h$ の位置に静止していたとする。小球の位置を表す式を求めよ (= 位置 x を時間 t の関数として書き表せ)。

---

[2] まず、m とか g、k は時間とともに変化しない (時間微分しても 0) ということに注意して、微分方程式が解きやすくなるように、変数を v から少し変化させるという考え方もある。どう変更を加えたらいいだろう??

[3] 次のように新しい変数 V を導入してみよう: $V = v + \frac{mg}{k}$ 。V に対する微分方程式を書いてみるとどうなるだろうか。これは解けないかな??

問題 [15] 斜め投げ上げの問題

質量 m の小球を水平から $30\ ^\circ$ の角度で、投射した。投げ出した瞬間の速さは v であったとして、次の問題に答えよ。

(1) 運動中のこの小球に働く力を図示せよ。(力の向きを示す矢印を描き、その大きさを矢印の隣に書け。)

(2) 水平方向の位置を x、鉛直方向の位置を y と書くことにする。「位置ベクトルの 2 階時間微分に質量を掛けたものが物体に働く力に等しい」という関係に従い、Newton 方程式を書け。

(3) (2) で求めた微分方程式の一般解を求めよ。

(4) 初期条件を当てはめて、小球の運動を表す式を求めよ (= 位置 x, 速度 v を時間 t の関数として書き表せ)。なお投げ出したときの位置を原点 $x=0$, $y=0$ とする。

(5) この小球に、速度に比例する空気抵抗があるとしたときに、(1)〜(4) をやり直せ! (比例定数は k とする)
なお一般解は速度についてだけ求めればよい。先の問題 [14] も参考にしながら考えるとよい。

物理学IA –問題練習プリント2

担当者／山本明

5　微分方程式2 –振動に関する問題

問題 [16] 微分方程式の練習 —一階線形常微分方程式 (定数変化法)

解けそうに見えて、なかなか大変な問題。
次に挙げる微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $$\frac{dy}{dx} = xy + xe^{x^2}$$

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - 1} + 2(1 - x^2)$$

問題 [17] 微分方程式の練習 —二階線形常微分方程式 [同次形]

次に挙げる微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

問題 [18] 微分方程式の練習 —二階線形常微分方程式 [非同次形]

次に挙げる微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -2y + \sin x$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x$$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^x$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$$

6　単純な振動 (調和振動子)

問題 [19] ばねに付いたおもりの運動

天井からバネ定数 k のばねで質量 m の小球をつり下げた。釣り合いの位置から真下に x_0 だけひっぱり、手を放した。手を放してからの時間を t として、その後の小球の運動を調べよ。なお重力加速度は g とする。

(1) ばねが釣り合いの位置から x だけ伸びているときに小球にかかる力を図示せよ。(力の向きを示す矢印を描き、その大きさを矢印の隣に書け。)
(2) 垂直方向のばねの伸びを x として運動方程式を立てよ (=x に関する微分方程式を求めよ)。
(3) (2) で求めた微分方程式の一般解を求めよ。
(4) (3) で求めた一般解に初期条件を課して、球の運動を定めよ。

問題 [20] 振り子 —揺れる角度が小さいとき

長さ ℓ の糸で、質量 m の質点をつるし、振動させた。次の問いに答えよ。なお、以下では重力加速度を g とする。

(1) 糸の角度が θ であるときに質点にかかる力を図示せよ。(力の向きを示す矢印を描き、その大きさを矢印の隣に書け。)
(2) 図のように接線方向と糸の方向に座標軸を入れたとき、糸の角度を θ として、 運動方程式を立てよ。なお x 軸の値は、真下から質点の位置までの弧の長さである。それぞれの座標の方向について微分方程式を立てること。
(3) 振動の幅は十分に小さい角度であるとして、(2) で求めた微分方程式を近似せよ[4]。
(4) (3) で求めた微分方程式を解き、質点の運動を定めろ。ただし、糸の揺らし始めの角度は θ_0 とする。

[4] $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は、θ について

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots$$

のように展開することができる。これで「角度が小さい＝ θ の 2 乗以上の項は 0 である」という近似を行う。なお上記の展開については次の「テイラー展開・マクローリン展開」で考えてみよう。

7　テイラー展開・マクローリン展開

近似式を求める計算手法を知っておこう。

問題 [21] マクローリン展開の練習

次の関数を $x = 0$ の周りでテイラー展開せよ。

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad e^x \\
&(2) \quad \sin x \\
&(3) \quad \cos x \\
&(4) \quad e^{ix}
\end{aligned}
$$

問題 [22] テイラー展開の練習

a を適当な正の定数、$\vec{e}_x$ を x 方向の単位ベクトルとして、物体に働く力が

$$\vec{F} = (x^2 - a^2)\vec{e}_x$$

とわかっている場合 $\cdots$

(1) $x = a$ 付近では、どのような力が働くだろうか。
(2) $x = -a$ 付近では、どのような力が働くだろうか。
(3) $x = b$ 付近では、どのような力が働くだろうか。
(b は a とは異なる定数とする)

それぞれの場合につき、$\vec{F}$ の表式を x の 1 次まで近似せよ。

8　いろいろな振動

問題 [23] 強制振動

長さ ℓ の糸に小球をつけて、振動させた。はじめ小球は静止していたところに、振動がおこる方向に $F = mg\sin\omega_0 t$ という力を加えたとする。t は力を加えはじめた瞬間からの時間として、小球のその後の運動を求めよ。

問題 [24] 減衰振動

水平に設置したばね (バネ定数 k) に、質量 m の質点を付けて振動させた。このとき次の問いに答えよ。

(1) この質点には速さに比例した抵抗力が働くとして。運動方程式を立てよ。

(2) (1) で求めた運動方程式を解け。ただし、始めに質点を x_0 だけ動かしてから手を離したものとし、手を離してからの時間を t と表すこととする。

(3) (2) で求めた $x(t)$ のグラフを描け。なお抵抗力の大きさは適当に仮定して場合分けをせよ。

物理学IA –問題練習プリント3

担当者／山本明

9　力学的エネルギー保存の法則

Newton 方程式を変形 (時間積分) すると、時間変化しない (=保存する) 量が存在することがわかる。これを「エネルギー」と呼んでいる。

問題 [25] エネルギー保存則の証明 —1 次元の場合

Newton 方程式の両辺に v を掛けて t で積分すれば、エネルギー保存則が証明できる。簡単のためここでは 1 次元でのみ考えることにして、このエネルギー保存則を証明しよう。なおエネルギーとは運動エネルギーとポテンシャルエネルギー[5]の和を指している。

(1) 1 次元の Newton 方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

である。これの両辺に $v(=\frac{dx}{dt})$ を掛けて、t で積分しよう。まず右辺に注目する。右辺が $\int F dx$ と変形できることを示せ。

(2) 左辺に注目。左辺が $\int d\left(\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2\right)$ と変形できることを示せ。

(3) (2) より、運動エネルギー K を $K = \frac{1}{2}mv^2$ と定義すれば、左辺は運動エネルギーの変化を表す量になっている。さらにポテンシャルエネルギー U を $F = -\frac{dU}{dx}$ を成立させるように選べば (1) の結果をさらに変形することができる。これらのことを用いて、$K + U$ が時間とともに変化しない (=保存する) ことを証明せよ。

注意 1 : これまで天下りに与えられていた $\frac{1}{2}mv^2$ とか mgh といった式はこのような考え方から導かれた形である。適当な経路を通り元の位置に戻るような積分をしたときに、積分結果が 0 になるような力に対してのみポテンシャルエネルギーを考え、そのような力のことを “保存力” と呼ぶ。

注意 2 : $F = -\frac{dU}{dx}$ をポテンシャルエネルギーの定義とみなせば、逆に力からポテンシャルエネルギーを求めるには、基準点を設けて力を距離で積分すればよいことがわかるだろう。

注意 3 : 3 次元の場合も同じように証明できる。そのときは各成分について Newton 方程式を立てて、ポテンシャルエネルギーは、

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

を満たすものとする。

[5]ポテンシャルエネルギーと位置エネルギーは同義語。

10　ポテンシャルエネルギーと力の関係

問題 [26] 力からポテンシャルエネルギーを求める問題

力が次のように与えられているとき、そのポテンシャルエネルギーを計算せよ。なお基準点は、適当に定めてよい。

(1) 地表付近の重力: $\vec{F} = mg\vec{e}_x$

(2) 万有引力: $\vec{F} = G\dfrac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$

(3) クーロン力: $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$

問題 [27] ポテンシャルエネルギーがわかっている問題

ポテンシャルエネルギー U が次の形をしているときを考える。

$$U = u\left\{r^4 - 2a^2r^2\right\}$$

ここで r は質点の位置を示し、質点の運動は 1 次元で行われるものとする。また u, a は適当な定数であるとする。

(1) このようなポテンシャルエネルギーがあるときに、質点はそれぞれの位置でどれだけの力を受けるだろうか。力 F を r の関数として求めよ。
(2) このポテンシャルエネルギーのグラフを描け。
(3) ポテンシャルエネルギーのグラフの傾きと力の働く向きの関係を述べよ。
(4) $r = a$ の位置に質点が静止していたとする。その位置からわずかに質点がずれたとき、その後質点はどのような運動をするだろうか?
(5) $r = 0$ の位置に質点が静止していたとする。その位置からわずかに質点がずれたとき、その後質点はどのような運動をするだろうか?

11 いろいろな保存量

詳しくは後期の物理学 IB で扱う予定です。

問題 [28] 運動量保存の証明

(古典) 力学において Newton 方程式 :

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}$$

は全ての現象を説明する根本になっている。この式が成り立つ場合、「運動量の変化が力積と等しい」ということを証明せよ。

なお運動量とは物体の質量にその物体の速さを掛けたものであり、力積とは物体に作用させた力の大きさにその力を作用させた時間を掛けたものである。

問題 [29] 運動量の保存則 — どんなときに運動量が保存するか

2 つの物体が運動方程式に従って運動している。このとき、2 つの物体の運動量の和が保存するための条件はなんだろうか?

問題 [30] 角運動量の保存則

(1) Newton 方程式から、角運動量 $\vec{L} = m\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ とトルク $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ の間の関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

を示せ。

(2) 考えている力が中心力 (力が原点からの距離 $|\vec{r}|$ のみに依存するということ) の場合、角運動量が保存することを示せ。

(3) (2) の結果を用いて、ケプラーの第 2 法則 (面積速度一定の法則) を導け。

12　おまけの問題

問題 [31] 質量が変化する問題[6]

宇宙塵の中を円運動する人工衛星の模型を考えてみよう。

(1) 人工衛星は質点とみなし、まず重力の効果で円運動しているとする。重力の大きさを $mR\omega^2$ と表記し、常に円 (地球) の中心向きとして、運動方程式を立てよ。なお R は円運動の半径 (地球の半径) で、m は人工衛星の質量、ω は適当な正の定数とする。ここでは宇宙塵の存在は無視する。

(2) (1) と同じように重力が働いているとする。ここでさらに宇宙塵の効果を考慮に入れよう。人工衛星は円運動をするうちにまわりに浮遊する宇宙塵を一定の速度で集めていくと考える。つまり人工衛星の質量が $\frac{dm}{dt} = 2c$ という割り合いで変化するとする。このとき、(1) で求めた運動方程式はどのような変化を受けるだろうか。改めて運動方程式を書き表わせ。なお、c は適当な定数である。

(3) (2) で求めた微分方程式を解け。ただし、質量が増加する割合 c はそれほど大きくなくて、$c^2 - m\omega^2 < 0$ であるとする。初期条件は矛盾がないように適当に定めてよい。

[6] 2005 年の講義では扱いません。おまけの問題です。

問題 [32] 速度の 2 乗に比例する空気抵抗[7]

質量 m の物体を静止状態から落下させる。空気抵抗として、速度の 2 乗に比例する力がかかるとき、速度はどのように時間と共に変化するだろうか。落下させ初めてからの時間を t として、速度を t の式で表せ。なお、運動は地表付近で起きるとして、重力は下向きに mg だけかかるとする。

ヒント[8]が必要ならば、読んでみること。

[7] 2005 年の講義では扱いません。おまけの問題です。

[8]

$$\frac{1}{a^2 - v^2} = \frac{1}{[?]}\left\{\frac{1}{a-v} + \frac{1}{a+v}\right\}$$

と書けるはず。辻褄が合うように ? の部分を定めればいい。

$\int \frac{1}{a^2-v^2} dv$ という積分は難しいが、$\int \frac{1}{a-v} dv + \int \frac{1}{a+v} dv$ ならば、積分できるのでは?

問題 [33] 連成振動[9]

質量 m の 2 つの質点 A と B がばね定数 k の 3 個のばねによって図のように結び付けられている。両側のばねは壁に固定されていて、つり合いの位置でばねは自然長であったとする。床の摩擦、空気抵抗、ばねの重さは考えないものとして、さらに運動は一直線上で起きるとする。以下の問に答えよ。

(1) 質点 B に力を加えて右方向に x だけ変位させた。このとき、質点 B に外から加えている力の大きさを求めよ。

(2) 質点 B をつり合いの位置に固定したまま、質点 A に力を加えて右方向に x_0 の変位を与えてから力を取り去った。この後、質点 A は単振動をした。力を取り去ってからの時間を t として、質点 A の運動を求めよ。

(3) 質点 A と B の両方に力を加えて、同じ向き (右方向) に等しい大きさ x_0 だけ変位を与えてから力を取り除いた。力を取り除いてからの時間を t として、質点 A と B に関する運動方程式を立てよ。

(4) (3) で立てた運動方程式を解け。

(5) 今度は二つの質点をそれぞれ逆方向に同じ距離だけ移動した場合を考えることにする。質点 A を右方向に x_0、質点 B は左方向に x_0 だけ動かしてから、同時に手を離したとする。このときの運動方程式を立てよ。

(6) (5) で立てた運動方程式を解け。

[9] 2005 年の講義では扱いません。おまけの問題です。