物理学IB —問題練習プリント

担当者／山本明

2005年後期

物理学IBでは剛体の運動について取り扱います。
「各自で練習せよ」と記載されているものは、講義中に扱わない予定のものです。後ほど答えのみ配布する…かもしれません(過度な期待はしないでください)。
講義中で取り上げた問題については、解答配布はしない予定です。

1 剛体の運動を決める

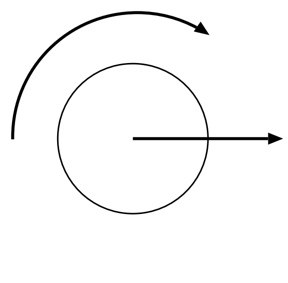
剛体の運動を決めるときは「並進運動」と「回転運動」に分けて考えるのがポイント。それぞれの運動を決める方程式を立てて、それらを解いていけばよい。

問題 [1] 回転しながら飛行する剛体球 1

空気中を回転しながら剛体球が飛行している。水平方向を x 軸 (進行方向を正の向き)、鉛直方向上向きを y 軸として、この剛体球の運動を定めよ。

なお球の半径は a、全質量を M とする。(中心軸回りの慣性モーメントは $I = \dfrac{2}{5}Ma^2$ である) また $t=0$ において剛体球は座標軸原点にあり、x 軸正の方向に v_0 の速さで動いていたとする。そして $t=0$ のとき球は図の右回りに ω_0 の角速度で回転していたとする。

重力加速度を g とし、ここで空気抵抗は無視できるほど小さいとする。

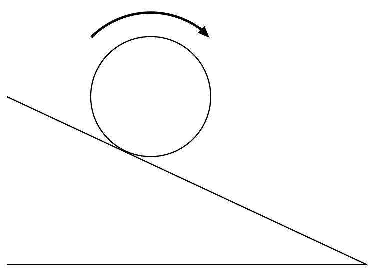


問題 [**2**] 坂を転がる球体

半径 a、密度が一定の球がある。この球の全質量を M とする。そのような剛体球の、中心を通る軸回りの慣性モーメントは $I = \dfrac{2}{5}Ma^2$ である。この球が、摩擦のある斜面を転がり落ちている。その運動の様子を求めるために以下の問いに答えよ。

なお斜面は水平方向から θ の角度であるとし、球は $t = 0$ のときに斜面の途中に静止していたとする。摩擦は球と床の接点に働き、摩擦係数を μ とする[1]。摩擦は球の接点の動きを妨げる向きに働く。

(1) 力のベクトルを図示せよ。その際、力の作用点 (力が働いている点) と力の方向を意識して描くこと。
(2) (1) で描いた図に、それぞれの矢印ごとに力の大きさを書き入れよ。
(3) 並進運動の方程式を立てよ。動き始めてから動いた距離を x として、
(4) (3) の方程式を解き、一般解を求めよ。
(5) 回転運動の方程式を立てよ。
(6) (5) の方程式を解き、一般解を求めよ。
(7) 一般解に初期条件を課して、不定定数の値を求めよ。
(8) この球が、滑らずに転がる条件 (μ と θ の関係式) を求めよ。



(おまけ) 滑りながら転がり落ちる条件はどうなるだろうか?

問題 [**3**] 坂を転がる円柱 (各自で練習せよ)

半径 a、密度が ρ、長さが b の円柱がある。円柱の中心軸回りの慣性モーメントは、$I = \frac{1}{2}Ma^2$ である。この円柱が中心軸回りに転がりながら、摩擦のある斜面を下っている。円柱が滑らずに転がる条件を求めよ。

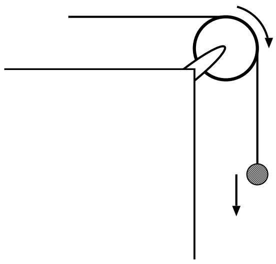
なお斜面は水平方向から θ の角度であるとし、円柱は $t = 0$ のときに斜面の途中に静止していたとする。摩擦は円柱と床の接点に働き、その摩擦係数を μ とする。

[1]球が床を垂直に押す力 [垂直抗力] の大きさを N と書いたとき、抵抗の大きさは μN となる。摩擦力には限界があり、最大静止摩擦係数を μ_0 と書くとすると $\mu \le \mu_0$。

問題 [4] 固定された滑車の問題 (各自で練習せよ)

半径 a、厚みが b の円板を滑車として使っている。滑車の素材は密度が均一であり、その密度を ρ とする。滑車には紐がついており、紐の動きと 1 対 1 に滑車は回転するものとする。

下の図のように装置を用意する。滑車の下の紐には質量 m のおもりを付けて、$t = 0$ で手を離す。おもりが ℓ だけ落下したら、紐は滑車から離れてしまうとして以下の問いに答えよ。なお紐の重さは無視できるほど軽いものとする。



(1) おもりに働く力を図示せよ。ただし、ここで糸の張力の大きさは、T という文字で表すものとする。

(2) 滑車に働く力を図示せよ。ただしここでも (1) と同じく、糸の張力を T とせよ。

(3) おもりの落下した距離を x と表して、おもりの運動を決める方程式を立てよ。なお、このおもりは質点とみなしてよいものとする。

(4) 紐がついている状態で、滑車の回転を決める方程式を立てよ。なお滑車の回転の角速度の大きさは、ω と表すものとする。

(5) 問題文には条件として「紐の動きと 1 対 1 に滑車が回転する」と書いてある。ということは、$\dfrac{dx}{dt}$ と ω の間にどのような関係式が成り立つだろうか?

(6) (3) (4) の方程式の一般解を求めよ。

(7) (6) の一般解に初期条件を課して、不定定数の値を決めよ。

(8) 紐が滑車から離れてしまう時刻を求めよ。また、その後の滑車の動きを決める方程式を立てよ。

(9) 滑車の回転の角速度を縦軸、手を離してからの時刻を横軸にしてグラフを描け。

(蛇足) 紐が離れた後のおもりの動きはどうなる?

問題 [5] 剛体振り子

以下の問いに答えよ[2]。

半径 a、厚さ b、全質量が M の円板がある。これの側面の一点を固定して、振動させる。回転に対する運動方程式を立てよ。

また、適当な角度だけ持ち上げて手を離したとする。$t = 0$ での角度を θ_0 と表記することにして、その後の角度の変化を求めよ。(θ を t の関数で表せ)

なお側面の一点を固定して振動する円板の慣性モーメントは、(後述の平行軸の定理で計算できて) $I = \frac{3}{2}Ma^2$ である。(厚さ b はこの表式では現れない)

[2] ここには回転しながら飛行する剛体球を空気抵抗ありで考えてみよう!…って問題を出そうといろいろ設定を考え続けたんですが、うまい手を見付けられませんでした。なにかいい問題を発見した人は私にも教えてください!

2　多体系の運動量と重心

問題 [6] 2体系の運動 (各自で練習せよ!)

質点Aと質点Bがある。それぞれの質量を m_A, m_B、それぞれの位置ベクトルを $\vec{r}_A, \vec{r}_B$ とする。また、外から質点Aにかかる力を $\vec{F}_A$、外から質点Bにかかる力を $\vec{F}_B$、質点Aが質点Bに与える力を $\vec{F}_{BA}$、質点Bが質点Aに与える力を $\vec{F}_{AB}$ と書き表すことにする。

この系の重心に関する運動方程式を立てよ[3]。なお質量 m_A, m_B は時間変化しないとする。

[おまけ] もっと粒子の数が多い場合はどうなるだろうか?

問題 [7] 運動量の保存則 — どんなときに運動量が保存するか

2つの物体が運動方程式に従って運動している。このとき、2つの物体の運動量の和が保存するための条件はなんだろうか?

問題 [8] 運動量の変化と力積

(古典) 力学において Newton 方程式 :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

は全ての現象を説明する根本になっている。この式が成り立つ場合、「運動量の変化が力積と等しい」ということを証明せよ。

なお運動量とは物体の質量にその物体の速さを掛けたものであり、力積とは物体に作用させた力の大きさにその力を作用させた時間を掛けたものである。

[3] なお、重心の座標は

$$\vec{r}_G = \frac{m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B}{m_A + m_B}$$

で与えられる。

[重心の位置を求める練習]

問題 [**9**] 質点系の重心

次の状況における重心を求めよ。

(1) 座標 $(1,2)$ に質量 m の質点 A、座標 $(3,0)$ に質量 m の質点 B がある場合。
(2) 座標 $(1,2)$ に質量 m の質点 A、座標 $(3,0)$ に質量 $2m$ の質点 B がある場合。

問題 [**10**] 直方体の重心

3 辺の長さが a、b、c であるような直方体。密度は一定であるとして、その重心の位置を求めよ。

問題 [**11**] 球の重心

密度が一定の材質でできた半径 a の球がある。この球の重心の位置を求めよ。なお参考までに、原点を中心とする球を数式で記述すると $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ である。

問題 [**12**] 円柱の重心

半径が a、高さが b の円柱がある。この円柱の密度は一定であるとして、円柱の重心の位置を求めよ。

3　多粒子系の角運動量と慣性モーメント

問題 [13] 角運動量の保存則

(1) Newton 方程式から、角運動量 $\vec{L} = m\vec{r} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ とトルク $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ の間の関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

を示せ。

(2) 考えている力が中心力 (力が原点からの距離 $|\vec{r}|$ のみに依存するということ) の場合、(原点まわりの) 角運動量が保存することを示せ。

問題 [14] 2 粒子系の角運動量

質量 m_1 の質点と質量 m_2 の質点があり、互いに力を及ぼし合いながら運動している。このとき、それぞれの角運動量の和が時間変化しない (=保存する) ことを証明せよ。ただし、2 つの質点には、互いに及ぼしあっている力以外に、外からの力は働いていないものとする。

(おまけ) もしも外から力を受けている場合、角運動量は保存するだろうか?

問題 [15] ベクトルの外積に関係する公式

(1) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

(2) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

(3) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

上記の式を証明せよ。(この講義中で 1 は必須。2 は知ってると便利。3 は他の講義で出会うかも)

もしも「証明せよ」と言われて、何をしていいかわからないならば、具体的に $\vec{A} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{B} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{C} = (c_x, c_y, c_z)$ と置いて、左辺を計算してみよう。そして同じように具体的に右辺も計算してみよう。そして、左辺の計算結果と右辺の計算結果を比較してみれば良い。

[慣性モーメントを計算する練習 (固定軸)]

問題 [16] 慣性モーメントの計算：球の慣性モーメント

剛体の固定軸周りの慣性モーメントは、

$$I = \int_{\text{剛体}} \rho r^2 dv$$

で計算できる。ここで ρ は剛体の密度、r は固定軸までの距離で、dv とは微小の体積要素である。この積分は剛体中の全領域で行う多重積分である。

具体的に、半径 a の球の慣性モーメントを求めてみよう。回転軸は球の中心を通る軸とし、この球の質量を M とする。

(1) ここでの積分は x, y, z の直交座標系よりも r, θ, ϕ の極座標系を用いたほうが計算しやすい。まずは極座標で (r, θ, ϕ) の点が中心軸からどれだけ離れているかを r, θ, ϕ を用いて表せ。

(2) 直交座標系 (x, y, z) では微小の体積要素 dv は単純に $dv = dxdydz$ と書き表わせる。しかし極座標では単に $drd\theta d\phi$ とはならない。極座標での微小体積要素 dv を $r, \theta, dr, d\theta, d\phi$ を用いて書き表わせ。

(3) この球の密度 ρ を a と M で表せ。

(4) 以上の下準備で、球の慣性モーメントを計算せよ。

問題 [17] 円柱の慣性モーメント

半径 a、高さ b の円柱の中心軸回りの慣性モーメントを求めよ。ただしこの円柱は密度が一定の材質でできているものとし、その値を ρ とする。

この問題では円柱座標を用いると計算しやすい。これは［z 軸からの距離、x 軸からの角度、z 座標の値］という 3 つの数値で位置を書き表わす座標。
このことと前問を参考にして、計算せよ。(まずは円柱座標系での微小体積を求めてみよう)

(おまけ) 最後の答えは、全質量を M として書いてみるとどうなるか?

問題 [18] 立方体の慣性モーメント

辺の長さが a、密度が一定値 ρ である立方体がある。これの重心を通り 2 つの面を垂直に横切る軸回りの、慣性モーメントを求めよ。

この問題では単純にデカルト座標を用いて計算すると良い。

(おまけ) 最後の答えは、全質量を M として書いてみるとどうなるか?

[便利な公式](各自で練習せよ)

問題 [**19**] 平行軸の定理

全質量が M の均一な密度の物体がある。その重心を通る軸回りの慣性モーメント I_G がわかっているとき、その軸と平行で h だけ離れた軸を考え、その軸回りの慣性モーメントを求めよ。

問題 [**20**] 円柱の慣性モーメント **2**

半径 a、高さ b、密度一定で全質量が M の円柱がある。この円柱の側面に接し、中心軸と平行な軸を考える。その軸回りの慣性モーメントを求めよ。

問題 [**21**] 球の慣性モーメント **2**

半径が a で、密度が一定、全質量が M の球がある。この球の側面のある 1 点に接する直線を考える。その直線回りの慣性モーメントを求めよ。

問題 [**22**] 段差を越えて転がる球

半径 a で密度が一定、全質量が M の球がある。

それが水平な床上を一定の角速度で回転して進んでいる。その先には高さ b $(b < a)$ の段差があり、球はその段差を越えて回転していく。段差に入る前の角速度を ω としたとき、角運動量の保存から、段差を超える際の角速度 Ω の値を求めよ。

問題 [**23**] 任意の回転方向での慣性モーメント

角速度 $\vec{\omega}$ で回転している剛体の角運動量は $\vec{L} = \int \rho \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dv$ と表すことができる。$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$、$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ を代入して、角運動量を

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

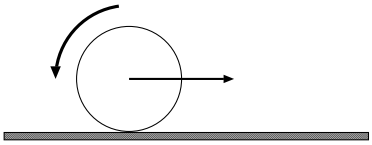
という形に書き表したとする。このとき、$I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, \cdots$ を具体的に書き表すとどうなるか。

4　剛体の運動を決める 2: 撃力を伴う場合

問題 [24] バックスピンをかけた球の動き

水平な床の上を剛体の球が転がっている。はじめにこの球にはバックスピンがかけられているとして、その後の球の動きを考えてみよう。

球の半径は a、密度が一定で全質量は M とする。$t = 0$ での水平方向の速さを v_0、回転の角速度を ω_0 とし、この床には摩擦係数を μ とするような摩擦力が働くものとする。



以下の問いに答えよ。

(1) この球に働いている力を図示せよ。ただし、力の働いている位置と力の向きがわかるように描くこと。摩擦力の向きには特に注意せよ。接点の運動を妨げる向きに働く。
(2) 重心の並進運動に対する方程式を立てよ。
(3) 球の回転運動に対する方程式を立てよ。
(4) (2) (3) で立てた方程式の一般解を求めよ。
(5) 初期条件を課して、不定定数を定めよ。
(6) しばらくすると球はすべらずに転がるようになる。そうなると摩擦はもはやかからなくなる。摩擦がかからなくなる時刻を求めよ。
(7) (6) で求めた時刻以降の運動を求めよ。

問題 [**25**] トップスピンをかけた球の動き **1** (各自で練習せよ)

水平な床の上を剛体の球が転がっている。はじめにこの球にはトップスピンがかけられているとして、その後の球の動きを考えてみよう。

球の半径は a、密度が一定で全質量は M とする。$t=0$ での水平方向の速さを v_0、回転の角速度を ω_0 とし、この床には摩擦係数を μ とするような摩擦力が働くものとする。

以下の問いに答えよ。

(1) この状況では、角速度の大きさと水平方向の速さの大小関係によって、床との接点の動く向きが異なる。床との接点が、球の水平方向の動きと同じ向きに動くという条件と、球の水平方向の動きとは逆向きに動くという条件を求めよ。
(2) 先の問題 [24] では、(1) のような条件を考える必要があるだろうか?
(3) この球に働いている力を図示せよ。ただし、力の働いている位置と力の向きがわかるように描くこと。摩擦力の向きには特に注意せよ。接点の運動を妨げる向きに働く。必要に応じて場合分けをして、複数の図を書くこと。

以下の問いでは、摩擦力は球の水平方向の速度と同じ向きに働くものとする。

(4) 重心の並進運動に対する方程式を立てよ。
(5) 球の回転運動に対する方程式を立てよ。
(6) (4) (5) で立てた方程式の一般解を求めよ。
(7) 初期条件を課して、不定定数を定めよ。
(8) しばらくすると球はすべらずに転がるようになる。そうなると摩擦はもはやかからなくなる。摩擦がかからなくなる時刻を求めよ。
(9) (8) で求めた時刻以降の運動を求めよ。

問題 [**26**] トップスピンをかけた球の動き **2** (各自で練習せよ)

ほとんど先の問題 [25] と同じ。水平な床の上を剛体の球が転がっている。はじめにこの球にはトップスピンがかけられているとして、その後の球の動きを考えてみよう。

球の半径は a、密度が一定で全質量は M とする。$t = 0$ での水平方向の速さを v_0、回転の角速度を ω_0 とし、この床には摩擦係数を μ とするような摩擦力が働くものとする。

以下の問いに答えよ。ただし、摩擦力は球の水平方向の速度と 逆の向きに 働くものとする。

(1) この球に働く摩擦力の向きから、v_0 と ω_0 の間に成り立つ関係を見抜け。(どういう条件式が成り立つか?前問を参考にして考えよ。)
(2) この球に働いている力を図示せよ。ただし、力の働いている位置と力の向きがわかるように描くこと。摩擦力の向きには特に注意せよ。接点の運動を妨げる向きに働く。
(3) 重心の並進運動に対する方程式を立てよ。
(4) 球の回転運動に対する方程式を立てよ。
(5) (3) (4) で立てた方程式の一般解を求めよ。
(6) 初期条件を課して、不定定数を定めよ。
(7) しばらくすると球はすべらずに転がるようになる。そうなると摩擦はもはやかからなくなる。摩擦がかからなくなる時刻を求めよ。
(8) (7) で求めた時刻以降の運動を求めよ。

問題 [**27**] トップスピンをかけた球の動き **3** (各自で練習せよ)

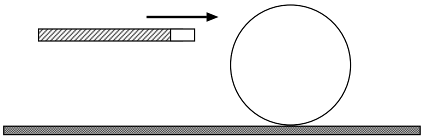
ほとんど先の問題 [25] 問題 [26] と同じ。水平な床の上を剛体の球が転がっている。はじめにこの球にはトップスピンがかけられているとして、その後の球の動きを考えてみよう。

球の半径は a、密度が一定で全質量は M とする。$t = 0$ での水平方向の速さを v_0、回転の角速度を ω_0 とし、ここでは始めから 摩擦力が発生しなかった ものとする。以下の問いに答えよ。

(1) “ 摩擦力が発生しなかった ”ということは、v_0 と ω_0 の間にはどんな関係式が成り立っているだろうか? (前々問を参考にせよ。)
(2) この球に働いている力を図示せよ。ただし、力の働いている位置と力の向きがわかるように描くこと。
(3) 重心の並進運動に対する方程式を立てよ。
(4) 球の回転運動に対する方程式を立てよ。
(5) (3) (4) で立てた方程式の一般解を求めよ。
(6) 初期条件を課して、不定定数を定めよ。

問題 [28] 球突きの問題

水平な床の上に半径 a、全質量 M の剛体球がある。球の密度は均一であるとする。この球を床から ℓ だけ離れた位置を棒で突き、球を転がす。以下の問いに答えよ。



(1) 棒で水平方向に撃力 (=瞬間的に大きな力) を加えるものとする。これにより球の突かれた位置は、水平方向に力積を与えられる。その力積の値 W と書くことにする。このとき、突かれた後の球の速度を求めよ。
(2) (1) の続き。突かれた後の球の角速度も求めよ。
(3) 球にトップスピン、バックスピンがかかる条件も求めよ。
(4) 球が滑らずに転がる条件を求めよ。また、この床には摩擦力が働くものとして、摩擦力が球の進行方向と同じ向きにかかる条件と、進行方向と逆向きに摩擦力がかかる条件を求めよ。(条件は ℓ と a の間の関係式として書き表せ)

問題 [29] ビリヤードの問題 (各自で練習せよ)

ビリヤードで手球をキューで突くという動作を、剛体の考え方で記述してみよう。

計算しやすくするためにいくつかの近似と状況設定を行う。まず手球は半径 a 質量 M の剛体球だとして考える。また手球の中心軸上で床から ℓ だけ離れた位置をキューで突くことにする。つまり運動は直線的で、球が左右にぶれることはないとする。$a < \ell < 2a$ として、以下の問題に答えよ。

(1) キューで突くことで手球に与えられる撃力 (=力) が、床に平行に大きさ F であるとし、その力によって球に与えられる力積を W と書くことにする。(つまりキューと手球の接触時間を δt として、$W = F\delta t$ という省略記号である) このとき、キューで突いた直後の球の速度と角速度を求めよ。なお、突く前に球は静止していたとする。
(2) 球と床との摩擦係数 (動摩擦係数) を μ とする。床との接点で球がどちらに動いているかによって、摩擦力の向きが変わってくる。そのことに注意しつつ、手球の重心に関する運動方程式と回転に関する方程式を立てよ。
なお場合分けの条件式は、球を突く高さ ℓ に関する条件として書き表すこと。
(3) (2) で求めた方程式を解け。また、球の (重心の) 速度に関するグラフを、横軸に突いてからの時間 t をとって描け。
球が滑べらずに転がり始めた後は、摩擦力は働かなくなる。そのことに注意して答えよ。(場合分けした場合、それぞれについて答えよ)

5　コマの動き

問題 [**30**] 円すいの重心

底面が半径 a の円で、高さが h の円すいがある。その密度は一定であるとして、この円すいの重心の位置を求めよ。

問題 [**31**] 円すいの慣性モーメント

底面が半径 a の円で、高さが h の円すいがある。その密度は一定であり全質量を M とする。この円すいの中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

問題 [**32**] コマの歳差運動

底面が半径 a の円で、高さが h の円すいがある。その密度は一定であり全質量を M とする。この円すいの底面を上にして、角速度 ω で回転させる。

回転軸は鉛直方向から θ だけ傾き、その回転軸は鉛直方向の軸まわりに角速度 Ω で回転しているとする。このコマの動きを求めよ。特に θ, ω, Ω の間に成り立つ関係式を求めよ。