演習の授業風景[1]
問題を解くための物理の教科書
(電磁気)

山本明[2 3]

平成 17 年 2 月 18 日

[1]2002 年後期 基礎物理学演習の授業より
[2]mail: yamamoto@th.phys.titech.ac.jp
[3]URL: http://www.th.phys.titech.ac.jp/~yamamoto/top.html

はじめに

これは東京工業大学で 2002 年度に TA [1]として行った基礎物理学演習の授業の記録です。範囲は電磁気学でした。演習の進め方は TA に一任されているので、試みに講義形式の説明を行い、それを教科書風にまとめてみることにしました。

物理学を学んでいく上で、重要になる道は 3 通りあると私は思っています。そして大学における物理教育では、これらのバランスが大事だろうと考えています。その 3 通りの道というのは次の 3 つです。

> ひとつは物理の理論体系の美しさを噛みしめていく道。どんな前提で理論を組み立てているのか、そしてそこからの帰結はどういうものなのか。それらを厳密に、じっくりと調べていく道です。理論を深く知るためには大事になります。
>
> ふたつ目は、その理論体系を現実的な問題に当てはめて、なにかしら近似も交えて、現実的な答えを引き出していくという仕事。理論の美しさを追うだけで満足せず、それをいかに現実に適用するのかを考えなくては、物 [モノ] の理 [コトワリ] を追っているとは言えません。理論を現実に適用するにはそれ相応、独特の技術やセンスが必要になるでしょう。
>
> そしてみっつ目は大分、教育的な側面になりますが、すでに答えがわかっている単純な状況に理論を当てはめて、なにかしら結果を導く練習。現実をかなり理想化して理論を適用しやすくしておきます。

さて、大学で物理学の授業を受けると、なぜかひとつ目の道にばかり固執した授業が多いような気がしてなりません。ひとつ目——理論自体を吟味していくこと——は、物理学をよく知るために欠かせないことです。とても大事な話ですが、これは将来の専門家向けの話といえるでしょう。それに対して学部 1 年生が受ける「物理学」は——物理学科以外の人が受けるものなら特に——もっと第二の道にも力を入れて、物理学と他の学問との繋がりについても言及していく姿勢が必要だと思うのです。

さて大学で行われる講義でもっと第二の道にも力を入れるべきなんだとすれば、それじゃあ、“講義 (東工大では助手、助教授、教授など専任の教官が担当します)”とセットで学生が受けることになる“演習 (東工大では助手か TA が担当します)”の授業ではなにに重きをおくべきでしょうか。…演習を始める前に、そんなことを考えました。

演習の授業でまで第一の道 (理論体系) を教えることは無意味だと思います。それは講義の授業に任せればいいこと。それなら演習では、より現実に即した問題を取り扱う第二の道を示すのは悪くないと思いました。だけど、これには並々ならぬ労力が掛かります。少なくとも東工大 TA の安月給 (月 2 万円〜2 万 4 千円。年間 9ヶ月) では、やりたいと思

[1] ティーチングアシスタント。要は大学院生が行うアルバイトです。東工大では学部 1 年生が受ける演習の授業を丸々任されてしまいます。ここまで TA に一任してしまう学校は珍しいんじゃないかと思います。

えませんでした。そもそもこれを実行するには私の実力自体、不足している気がしてなりません。

やはり演習の授業というからには、理論を適用しやすいように極めて理想化した状況を考えて、その状況の解析を行うことがいいだろうと考えました。第三の道——要するに高校でおなじみの「問題練習」というやつです。これを通して、理論をより深く理解することもできるし、場合によっては、一見無味乾燥に感じる理論も案外現実的なものだと感じられるかもしれません。

そのような考えに立って、演習の授業を組み立てました。ですから講義形式の説明を教科書風にまとめる——と書きましたが、演習の授業であることを踏まえると、どうしても普通の教科書のようにはなりません。つまり特定の方程式を説明するとき、その方程式にどういう意味があるかよりも、その式の使い方に力点を置いて話をしています。

世に出ている教科書は大抵、理論体系を美しく説明しようとしているものだと思います。それこそが正しい教科書の姿であるという固定観念でもあるかのように。実は私自身にもそういう観念があるため、このような冊子を公開するのにはやや抵抗を感じるのも事実です[2]。

それぞれ式や法則が学問体系の中でどのような意味を持っているのか、まるで説明していないというのは、自分の実力のなさを世間にアピールしているような気がしてなりません。しかし——そもそも実力がないのは事実ですし、いまさら見栄を張っても仕方ないかなと思い直しました。いまなら若気の至りとごまかすこともできるかな…と開き直っています。

担当したクラスでは高校で物理を履修してきていないという方が数人おられたので、私が行う説明では、それ単体で聞ける内容 (その他の授業には頼らない) を目指すことにしました。

かくして私の演習の目標は 2 つになりました。「公式の使い方に力点を置く」かつ「この説明だけで電磁気学の基礎知識を得られる」——この目標は、この教科書にも共通しています。…が、これはどうにも難しかったと白状します。私の実力不足に起因するのですが、わかっている人には退屈で、わからない人にはやっぱりわからない…そんな内容になってしまった気がしてなりません。書き出してみると理想と現実の違いを思い知ることになりました。

ひとまず、こんなものでも授業記録としての意味は持てるかと思い、公開することにしました。ある意味、いましか書けない文章であることに違いはありません。

こんなものでも、ないよりはいい…と思いませんか??

2003 年 11 月　山本明

[2] ですからこの冊子を読んで「物理がわかった」とは言わないでください。ただ物理がわかる手助けにはなるのではないか…と期待しています。

(追記): この文章は東工大 7 類を対象に行った演習が元になっています。予備知識として、微分、偏微分、積分などを仮定していることはご了承ください。

目 次

第0章　電磁気学の概論

いきなり本題に入っていってもいいんですが、細かい議論に振り回されて、「一体自分はなにをやろうとしているのか」ってことを見失ってしまっては困ります。そこでまずは、大雑把に電磁気学という分野はなにを目指しているのか、どういうことをやるのかってことを話しておきたいと思います。

前期に力学をやったときは「力学は物体の動きを予測しようとする学問だ」と話しました。物体の位置や速度といったものが、時間とともにどのように変化するかを求める学問が力学です。そういった位置や速度が時間とともにどう変化するかを教えてくれるのがNewton 方程式でした。Newton 方程式と呼ばれる微分方程式を立てて、それを解く——そうすると、物体の動きがわかるという流れです。

物理学が目指しているものは、最終的には「物体の動きを予測したい」ということです。これは力学だろうと電磁気学だろうと変わりません。そして物体の動きを予想するためには、「Newton 方程式が立てられればいい」わけですね。さらに Newton 方程式を立てるためには、「物体に働く力がわかればいい」のでした。

はい、電磁気学がなにを目指しているか——それはやはり、「物体の動きを知りたい」ということです。そのためには、物体に働く力がわかればいい。ただこれまでと違うのは、電磁気学で扱うのは電気と磁気…つまり電荷や磁荷を持っている物体だけを考察の対象としている点です。電荷とは「電気の力をどれくらい受けやすいか、電気の力をどれだけ他に与えるか」という量だと思っておいてください。磁荷というものも同様に「磁気の力をどれだけ受けるか、与えるか」と考えておきましょう。つまり、

物体の動きが知りたい

↑

Newton 方程式を立てて解けばいい

↑

物体に働く力がわかればいい

⇑　　　　　　　　　　⇑

電荷に働く力を知りたい　　磁荷に働く力を知りたい

ということです。

そして線から上の部分、つまり物体に働く力がわかって、Newton 方程式を立てて、解いて…というのは、「力学」の範囲です。それについては前期で、さんざんやってきましたので、後期の「電磁気学」ではもうやりません。電磁気学は「電荷に働く力」「磁荷に

働く力」がわかったら、それで満足。あとは力学の知識を使って、好きなとき好きなように物体の動きを求めればいいわけです。

さてそんな風に電荷に働く力、磁荷に働く力を知りたいというのが電磁気学の立場ですが、実はこれらに働く力は、「電場」と呼ばれるものと「磁場」と呼ばれるものがわかれば、それだけで力はわかるんです。電場とは「電荷があるために生まれる空間の性質」だと思っておいてください。そして磁場は「磁荷があるために生まれる空間の性質」といったところです。ただ磁場については「電荷の位置が変化することによって生じる空間の性質」と表現した方が、より正確かもしれません[1]。まあ電場と磁場については、おいおい説明していきます。ひとまず電磁気学では、主に「電場」と「磁場」について調べていきます。

物体の動きが知りたい
↑
Newton 方程式を立てて解けばいい
↑
物体に働く力がわかればいい

⇑	⇑
電荷に働く力を知りたい	磁荷に働く力を知りたい
↑	↑
電場 がわかればそれでいい	磁場 がわかればそれでいい
(電荷があるために生じる空間の性質)	(電荷の動きによって生じる空間の性質)

なんにしても、電磁気学で扱いたいのはこの「電場」と「磁場」です。これらが時間とともにどう変化するか、互いにどのような影響を及ぼしあうかということを電磁気学では知りたいと思っています。つまり電磁気学の目的というのは、

電磁気学の目的：　電場と磁場が時間とともにどう変化するかを知る。

ということなんですね。そして、そのことを教えてくれるのが「Maxwell 方程式」というものなんです。Maxwell 方程式は、電場や磁場が時間とともにどう変化するかを教えてくれる微分方程式 (もしくは積分方程式) になっています。

電磁気学の授業では最終的には、この Maxwell 方程式を導くところまでを目指しています。半年という授業期間ですので、その直前で止まってしまう場合が多いんですが、まあ目指しているのはそういうもの。

以上が、おそらく講義で行われるであろう、電磁気学の概要です。

さて、詳しい説明はせずに「電場」とか「磁場」とか言ってきましたが、これらは「ベクトル関数」です。空間の各点ごとに一つのベクトルが対応しているものです。

[1]参考：電荷だけを持つものは単体で存在します。電子などがそれです。それに対して、磁荷だけを持つものというのは、いまのところ存在は確認されていません。普段目にしている磁石などは、細かく見ると、原子内の電子が動いているために磁場が生じているものなのです。

電磁気学では、ゆくゆくはこのベクトル関数に関する微分方程式を得たいと思っているわけですから、まずはベクトルの扱い方に慣れておく必要があるでしょう。ということで、まずはじめの節として「数学の準備 (ベクトル解析)」をやっておきましょう。

教科書などでも一番始めに数学の話が載っていたりします。唐突な感じがして、なんでこんなことをやらなきゃならないのか疑問に思うでしょうが、ゆくゆくの目的を果たすのに便利なように、あらかじめ勉強しておきましょうってことです。

電磁気学をやっていくと、いろんな法則が出てきます。詳しくはその都度、学んでもらえばいいんですが、まあそれらがどんなものなのか、どんな立場のものなのかってことも、最後に軽く触れておきたいと思います。

まず出てくる法則は「クーロンの法則」。これは電荷に働く力を求める法則です。もしくは電場を求めるためにも使えます。そして「ガウスの法則」というものもあって、これは電場を求めるために使います。

$$\begin{tikzcd} \text{電荷に働く力を知りたい} & \text{クーロンの法則} \arrow[l] \arrow[dl] \\ \text{電場を知りたい} & \text{ガウスの法則} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

次に「ビオサバールの法則」「アンペールの法則」というものに出会うでしょうが、これらは (電流があるときの) 磁場を求めるための法則です。

$$\begin{tikzcd} & \text{ビオサバールの法則} \arrow[dl] \\ \text{磁場を知りたい} & \text{アンペールの法則} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

そして磁場が変化したときに電場がどんな影響を受けるか、ということを示す法則が「ファラデーの法則」と呼ばれるものです。

$$\text{電場} \xleftarrow[\text{ファラデーの法則}]{\text{(磁場の変化が電場に与える影響)}} \text{磁場}$$

まあ、授業で扱われるのはだいたいこの 5 つの法則でしょう。ガウスの法則、アンペールの法則、ファラデーの法則は、少し書き直すと Maxwell 方程式 (全部で 4 つの方程式の集まり) の一つになります。それぞれ、どんなものなのかってことを考えながら、気をつけて授業を聞いてみてください。

第1章　数学の準備(ベクトル解析と面積分・体積積分)

細かい数学の話は、はしょります。ひとまずどうやって計算するのかがわかるように、というレベルの話しかしません。

電磁気学ではベクトルに関する微分方程式や積分方程式を解こうとします。つまり、ベクトルの足し算・引き算、かけ算、微分とか積分といった操作を知っておく必要があります。ベクトルの足し算・引き算はいいですよね。それぞれの成分を足したり引いたりするだけ。これらは高校数学でやってきてるはずなのでここでは話しません。

問題にするのは「ベクトルのかけ算」と「ベクトルの微分」です。順番に解説していきましょう。

1.1　ベクトルのかけ算

まずは「ベクトルのかけ算」だ。これには2種類あります。「ベクトルの内積」「ベクトルの外積」という言葉を聞き慣れている人は、この部分は読まなくても大丈夫。「ベクトルの微分」まで飛ばしちゃってください。

はい「ベクトルのかけ算」の一つ目を紹介します。それは「ベクトルの内積」。

これは高校でもおなじみでしょう。$\vec{A}\cdot\vec{B}$ と書きますね。大きさは、二つのベクトルの大きさを掛けて、$\cos\theta$ を掛けたもの

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

ですね。θってのは、二つのベクトルの間の角度です。

この量がどんな量なのかというと、$|\vec{B}|\cos\theta$ というのが $\vec{B}$ を $\vec{A}$ の方向に射影したときの長さを表してて、それに $\vec{A}$ の大きさを掛けた量。つまり、二つのベクトルが同じ向きにどれくらいの値を持っているかという量ですね。

成分で書き下しておきましょう。今後、ベクトルはどれも3次元空間で考えますね。とすると、ベクトルの内積というのは、ベクトルのそれぞれの成分同士をかけ算して、足し挙げたもの

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

になっています。$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ というのが元々の式。これに $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ を代入して、えっちらおっちら計算すれば、この結果は出てきます。

ここで注意しておきたいことは、このベクトルの内積:$\vec{A}\cdot\vec{B}$ というのは、ベクトルとベクトルを掛けたものですが、最終的には1成分だけの量、つまりスカラーになっているということです。ベクトルの内積とは、「ベクトルからスカラーに変化させるような積である」ということに注意しておいてください。

$$\begin{array}{lcr} \text{ベクトルの内積} & & \text{(ベクトルからスカラーへ)} \\ \vec{A}\cdot\vec{B} = & |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta & = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{array}$$

それじゃあ、もう一つのベクトルのかけ算についてお話ししましょう。これは「ベクトルの外積」と呼ばれるもので、$\vec{A}\times\vec{B}$ と書きます。先ほどの「ベクトルの内積」は「ベクトルからスカラーにするようなかけ算」だと言いました。今度の「ベクトルの外積」というのは、実は「ベクトルからベクトルにするようなかけ算」なんです。

どんな定義かというと、ベクトルとベクトルのかけ算がベクトルになるということで、掛けた結果にも「大きさ」と「方向」がでてきて、

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left\{ \begin{array}{l} \text{大きさ: } |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \\ \text{ 方向 : } \vec{A}\text{と}\vec{B}\text{の両方に垂直な方向} \end{array} \right\}$$

となります。$\vec{A}$ と $\vec{B}$ の両方に垂直な方向というのを $\vec{C}$ と書くことにしましょう。

$$\vec{A}\times\vec{B} = (|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)\vec{C}$$

です。θ は先と同じく、二つのベクトルの間の角度です。

この量がなにを表しているかですが、$|\vec{B}|\sin\theta$ というのは、$\vec{B}$ から $\vec{A}$ におろした垂線の長さになっています。つまりこの量の大きさというのは「$\vec{A}$ と $\vec{B}$ で作られる平行四辺形の面積」を表しているわけです。「底辺×高さ」になっていますよね。

ベクトルの外積についても、成分で書き下しておきましょう。これははっきり言って、書くのが面倒になるようなものなんですが、

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y\,,\ A_zB_x - A_xB_z\,,\ A_xB_y - A_yB_x)$$

となります。カッコの中は左から順にx成分,y成分,z成分。これも $\vec{A}\times\vec{B} = (|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)\vec{C}$ というのが元々の式で、これに $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ を代入して、ひたすら計算していけば、この結果になります。疑い深い人は確認してみてください。1度やってみれば納得するはずです。[1]

最後にまとめておきますと、

[1] この外積の式の覚え方はいくつかあるのですが、文章にしにくいので誰かに相談するか自己流を編み出すかで覚えてください。

〜 ベクトルのかけ算 〜

ベクトルの内積 (ベクトルからスカラーへ)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

ベクトルの外積 (ベクトルからベクトルへ)

$$\vec{A}\times\vec{B} = (|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y\,,\ A_zB_x - A_xB_z\,,\ A_xB_y - A_yB_x)$$

ということです。以上が、ベクトルのかけ算のお話。それじゃあ、少し問題を解いてみてください。

1.2 *問題練習 (ベクトルのかけ算)

まずは計算練習です。

問題 1 (ベクトルの内積と外積)

$$\vec{A} = (2, 3, -4)$$
$$\vec{B} = (-1, 5, 0)$$
$$\vec{C} = (5, -3, 0)$$

のとき、次の量を計算せよ。

(1) $\vec{A}\cdot\vec{B}$

(2) $\vec{A}\times\vec{B}$

(3) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

(*) (3) で計算した $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ は、どんな量になっているだろうか？

* * *

どれもただ計算するだけ。それぞれベクトルなのかスカラーなのかに注意して解いてください。また (*) は内積と外積の意味をよく考えてみてください。$\sin\theta$ とか $\cos\theta$ とかに注意して考えれば、$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ をそれぞれひとつの辺とする立体 (平行六面体) の面積を計算しているということがわかると思います。

さて次は内積と外積に関する一般的な公式。これも計算練習です。それぞれのベクトルの成分を適当な文字において、計算してみてください。

* * * *

問題 2 (内積・外積に関する公式)

$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ を任意のベクトルとする。これらに関して、次の関係式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

(2) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

＊＊
＊　例えば、$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ というように書いて、それぞれの式を展開すれば関
＊　係式が成り立つことを証明できると思います。
＊
＊＊＊

1.3　ベクトルの微分

それでは、次に「ベクトルの微分」についてお話ししましょう。

電磁気学では、ゆくゆくはベクトルの関数についての微分方程式を得たいんですね。そのためにはベクトルの微分について知っておく必要があります。ここではベクトルの微分として 2 種類、それと関連した微分をもう 1 種類で、全部で 3 種類の微分の話をします。

まずはベクトルの微分の一つ目。

ベクトルの発散「$\mathrm{div}\vec{V}$」というものです。発散というのを英語で書くと divergence となります。その頭文字 3 つをとって、記号にしているんですね。「ダイバージェンス・ぶいベクトル」と読みます。これはどんな値かというと、次のように計算して求めることができる値です。

$$\mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z$$

V_x というのは $\vec{V}$ の x 成分。V_y というのは y 成分で、V_z は z 成分です。これにどういう意味があるかは、おいおい話していくことにして、ひとまず、こんな計算の仕方で求まる量なんだと思っておいてください。ベクトルのそれぞれの成分をそれぞれ対応する x, y, z で微分して、その結果を全部足す。それがベクトルの発散です。

このベクトルの発散について、ひとつ注意しておくと、これは「ベクトルからスカラーに変化させる微分」になっているということです。$\vec{V}$ というのはベクトルですね。だけど、$\mathrm{div}\vec{V}$ の計算式を見てみると、右辺はもうただの数。スカラーになっています。

ベクトルの発散は、ベクトルからスカラーを作る微分だということを覚えておいてください。

では続いて、ベクトルの微分の二つ目を紹介しましょう。

今度はベクトルの回転「$\mathrm{rot}\vec{V}$」です。読み方は「ローテーション・ぶいベクトル」です。回転というのを英語で書くと、rotation です。その頭文字 3 つをとって、記号にしたわけですね。古い教科書・問題集だと、rot ではなく curl(「カール」と読みます) と書いてある場合もあります。書き方が違うだけで、これは同じもの。もし curl というのを見かけても、慌てずに rot と読み替えちゃいましょう。この講義では、すべて rot に統一してお話しします。

はい、さっきのベクトルの発散は、「ベクトルからスカラーへの微分」でした。今度のはなんだろうか、というと、今度は「ベクトルからベクトルへの微分」になっています。このこと注意してくださいね。$\mathrm{rot}\vec{V}$ という量は、ベクトルなのです。

具体的にまた成分で書き下してみましょう。$\mathrm{rot}\vec{V}$ の計算法を見てみます。実はこれまた複雑な形になってて、あまり書きたくはないのですが、

$$\mathrm{rot}\vec{V} = \bigl(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\,,\ \frac{\partial}{\partial z}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_z\,,\ \frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\bigr)$$

となります。小さな添え字やマイナス符号に注意してくださいね。この量がどういう意味を持っているのかについては、またおいおい話するということで今日はちょっと省略させてください。計算法としては、こんな風にして計算します。

このベクトルの回転なんか、計算式覚えにくいですよね。よく使われる覚え方を紹介します。

ベクトルの発散やベクトルの回転を簡単に覚えるために、次のような量を考えましょう。

$$\nabla = \bigl(\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\bigr)$$

∇ という記号は「ナブラ」と読みます。ベクトルみたいな量です。x 成分、y 成分、z 成分みたいになってます。ただ、それぞれの成分はただの数じゃないですね。x で偏微分する記号だったり、y で偏微分する記号だったりしています。そんなわけで普通のベクトルとは違う。だけど、“だいたい” ベクトルみたいなもの。ベクトルもどきです。

このベクトルもどきの量を使ってどうするかというと、まずベクトルの発散—— ベクトルからスカラーへの微分は、

$$\nabla\cdot\vec{V} = \mathrm{div}\vec{V}$$

と覚えてしまいます。$\nabla\cdot\vec{V}$ というのは ∇ と $\vec{V}$ の内積という意味だ。内積の成分計算の式を思い出すと、

$$\nabla\cdot\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z$$

となっていますね。そんでこの式というのは、$\mathrm{div}\vec{V}$ そのまんまです。

∇ と $\vec{V}$ の内積として、ベクトルの発散を覚えることができるでしょう。それじゃあ、ベクトルの回転 $\mathrm{rot}\vec{V}$ の方はどうしようか。ベクトルの回転は、ベクトルからベクトルへの微分でした。こうやって覚えます。

$$\nabla\times\vec{V} = \mathrm{rot}\vec{V}$$

外積の式を覚えていないといけないけれど、こう考えれば $\mathrm{rot}\vec{V}$ としては楽に覚えられるはず。外積を成分で書き下した式を思い出しましょう。すると、

$$\nabla\times\vec{V} = \bigl(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\,,\ \frac{\partial}{\partial z}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_z\,,\ \frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\bigr)$$

ベクトルもどき ∇ を使って、ちゃんと上のようになっていることが確かめられるはずです。

ベクトルもどきの ∇ という量を導入すれば、ベクトルの発散は内積、ベクトルの回転は外積、というように覚えることができます。簡潔に表記することができます。実はこの書き方というのは珍しいものではなくて、結構よく使われる書き方です。ぜひこれも覚えておいてください。

さて最後に、スカラー関数の微分だけど、ベクトルの微分に関係するものを紹介します。それは「スカラーの勾配」というものです。勾配を英語で書くと gradient です。この頭文字 4 つをとって、例えば「gradϕ」というように書き、「グラディエント・ふぁい」と読みます。

今まで見てきたのは「ベクトルからスカラーへの微分 (div$\vec{V}$)」だったり「ベクトルからベクトルへの微分 (rot$\vec{V}$)」だったりしました。今度の勾配、gradϕ はどんな微分なのかというと、これは「スカラーからベクトルへの微分」になっています。

元の関数 ϕ はスカラー——成分を持たない普通の関数——ですが、gradϕ はベクトルになっているわけです。つまり成分がある。具体的に書き下すと次のようになります。

$$\mathrm{grad}\phi = \Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\phi\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\phi\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\phi\Bigr)$$

x, y, z のそれぞれの成分は、それぞれの変数で関数を偏微分したものになっています。これは rot$\vec{V}$ よりもずっと覚えやすいでしょう。

さっきの ∇ を使って書くと、

$$\nabla\phi = \mathrm{grad}\phi$$

となります。ベクトル (もどき) のスカラー倍になっているように見えますね。

はい、以上でベクトルに関する微分のお話しもおしまい。ベクトルからスカラーへの微分、ベクトルからベクトルへの微分、スカラーからベクトルへの微分の 3 種類をお話ししました。それぞれ、どういう意味を持つ量なのかは、おいおい話す機会があると思います。

ひょっとすると、この調子でスカラーからスカラーへの微分ってのはないのか? と思う人がいるかもしれませんね。それは今日は話しませんでした。けど、スカラーからスカラーへの微分ってのは、要するに普段やってる微分のことです。普通の関数の微分——あれがスカラーからスカラーへの微分になっている。だから特に新しいことはなにもないので、話しませんでした。

ベクトルの発散 (ベクトルからスカラーへ)

$$\nabla\cdot\vec{V} \Rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}V_z$$

ベクトルの回転 (ベクトルからベクトルへ)

$$\nabla\times\vec{V} \Rightarrow \quad \mathrm{rot}\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial y}V_z - \frac{\partial}{\partial z}V_y\,,\ \frac{\partial}{\partial z}V_x - \frac{\partial}{\partial x}V_z\,,\ \frac{\partial}{\partial x}V_y - \frac{\partial}{\partial y}V_x\right)$$

スカラーの勾配 (スカラーからベクトルへ)

$$\nabla\phi \Rightarrow \quad \mathrm{grad}\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\phi\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\phi\,,\ \frac{\partial}{\partial z}\phi\right)$$

1.4 *問題練習 (ベクトルの微分と積分)

問題 3 (grad の計算)

$\phi(\vec{r}) = -\dfrac{1}{r}$ のときの $\mathrm{grad}\phi(\vec{r})$ を計算せよ。ただし、$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

* *
*
*

この問題は計算練習。$\frac{1}{r}$ を x, y, z で微分するだけです。分数の積分や置換積分について思い出してください。この形の計算として、電磁気学を勉強していけば必ず出会うはずの関数の形を使っています。

そして次からの問題 2 つは、ベクトル関数の積分です。これまた電磁気学で出会うはずの計算ですから、ぜひ実際にやってみてください。

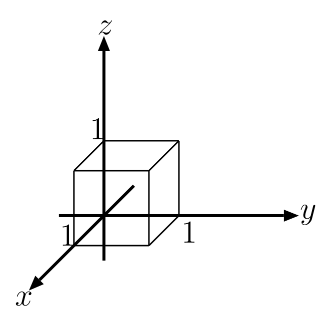
*
* * *

問題 4 (ベクトル関数の体積積分)

3 次元空間 (x, y, z) 中の各点で次のように定義されたベクトル $\vec{F}(x, y, z)$ を考える。

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(2x^2z\,,\ -y^2\,,\ 2yz\right)$$

また 3 次元空間中の立体として、(0,0,0)(1,0,0)⋯(1,1,1) を頂点とする 1 辺の長さが 1 の立方体を考え、それを V と呼ぶことにする。(右図参照)



立方体 V

(1) このベクトル場の発散: $\mathrm{div}\vec{F}$ を計算せよ。

(2) div$\vec{F}$ を立方体 V の内部全体で積分せよ[2]。

問題 5 (ベクトル関数の面積分)

3 次元空間 (x, y, z) 中の各点で次のように定義されたベクトル $\vec{F}(x, y, z)$ を考える。

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(x^2y + yz\,,\, x + y^2\,,\, yz^2\right)$$

また x-y 平面上、(0,0,0),(2,0,0),(2,1,0),(0,1,0) を頂点とする長方形を考え、それを A と呼ぶことにする。

(1) このベクトル場の回転: rot$\vec{F}$ を計算せよ。
(2) rot$\vec{F}$ を長方形 A の内部で面積分せよ[3]。

[2] この結果と、$\vec{F}$ を立方体 V の表面で積分したもの

$$\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

の結果を比較してみよ。なお ∂V というのは V の表面を表す記号で、$d\vec{S}$ は積分する面の法線ベクトルである。

[3] この結果と、$\vec{F}$ を長方形 A の境界を 1 周積分したもの

$$\oint_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

の結果を比較してみよ。なお ∂A というのは A の境界線を表す記号で、$d\vec{s}$ は積分する経路の接線ベクトルである。

＊＊
＊
＊

$\vec{F}$ というのは単に一般的なベクトルとして書いているだけです。これが力を表してるとか、そういう意味は全くありません。
さて (1) については、どちらの問題でも説明しなくていいですよね。単に計算するだけです。練習と思ってやってみてください。
(2) については説明がいるかもしれない。
まずは問題 4(2) についてだけど、これは「立体 V の内部全体で積分せよ」という指示。そのためには、まず x について 0 から 1 まで積分しましょう。そうしたものをさらに y について 0 から 1 まで積分してしまう。x について積分して y について積分したものを、最後に z について 0 から 1 まで積分する。
積分ってのは、その場所場所での値を足し算していくってこと。x について積分したらそれは線上の値を足し上げたってことで、それをさらに y について積分したら面上の全ての点の値を足したことになる。そして最後に z について積分したら、立体的に積分したことになる。
この問題では積分範囲が単純になるようにしてありますが、もっと複雑な立体について積分することもあるかもしれません。そのときは積分範囲がどのようになるかに注意してください。考え方はだいたい共通しているはずです。
問題5(2) についてですが、これは面積分です。計算してもらいたいのは $\int_A \mathrm{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ です。ここで $d\vec{S}$ と書いたのは微小の面積要素ベクトル。考えている面が x-y 平面にあるので、大きさとしては $dS = dxdy$ です。ベクトルなんで大きさだけでなく方向も持っています。こんな風に面で積分しようとするときは、面積要素ベクトルは「考えている面の法線方向」を向いていると考えます。つまり、$d\vec{S} = \vec{e}_z dxdy$ です。考えている面の法線とはつまり z 方向の単位ベクトルですね。それを $\vec{e}_z$ と書きました。あとはこれと $\mathrm{rot}\vec{F}$ との内積をとって、積分するだけです。
余裕のある方は、ぜひ脚注に書いてある計算もしてみてください。すると

$$\int_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{F} dv$$

$$\oint_{\partial A} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A \mathrm{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

という関係が見えるはずです。
∂V というのは考えている立体 V の境界、つまり六面体の表面である 6 つの面を指しています。つまり V の表面の 6 つの面それぞれについて面積分してみろ…という指示です。∂A というのは、考えている面 A の境界、つまり四角形の周りの 4 辺を指しています。A の周りの 4 つの辺について積分してみてください。ただしこのときは、積分の方向にも注意しましょう。ぐるっと A の周りを 1 周するように積分の方向を選びます。
いまは $\vec{F}$ として具体的な形を用いて計算し、上の 2 つの式を確かめてもらいましたが、この関係式というのは、実はどんなベクトルについても、どんな立体についても、どんな面についても成立する関係だということがわかっています。ひとつ目の式を「ガウスの定理」、ふたつ目を「ストークスの定理」と呼んでいます。

＊
＊ ＊ ＊

* *
*
*

最後は grad, div, rot に関する一般的な公式です。余裕のある人は実際に確かめてみてください。物理で扱う関数は、$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y)$ が成立するものばかりです。そのことに注意して、具体的に計算しようとしてみてください。どの式も確かに成立するってことがわかると思います。

*
* * *

問題6 (grad, div, rot に関する公式)

$\phi(r)$ は任意の関数、$\vec{A}(r)$ は任意のベクトル関数とする。省略記号 ∇ を次のように導入する。

$$\begin{aligned}
\nabla\phi(r) &= \mathrm{grad}\phi(r) \\
\nabla\cdot\vec{A}(r) &= \mathrm{div}\vec{A}(r) \\
\nabla\times\vec{A}(r) &= \mathrm{rot}\vec{A}(r) \\
\nabla^2\vec{A}(r) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{A}(r)
\end{aligned}$$

その上で、次の等式を証明せよ。

(1) $\nabla\times(\nabla\phi(r)) = 0$
(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}(r)) = 0$
(3) $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}(r)) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}(r)) - \nabla^2\vec{A}(r)$

第2章　電場と電位 ・クーロンの法則

今日は電場と電位についてお話しします。電場とか電位とかいうのはどちらも「電荷が存在するときに生じる空間の性質」です。

電磁気学では、この電場と電位が時間や状況とともにどう変化するのかについて考えていきます。なぜなら、電場というのは電荷を持つ物体に働く力に関係する量で、電位というのは電荷を持つ物体が複数ある時のエネルギーに関係する量だからです。力がわかればNewton 方程式を立てて物体の動きを予想できるし、エネルギーがわかれば方程式を解かなくてもいろいろなことがわかるから、どちらも大事な量なんですね。

2.1　電場について　: 電場の求め方 1 (クーロンの法則)

それでは電場の求め方からみていきましょう。

そのためにまず、電気の力を他に与えたり電気の力を他から受けたりする度合いを表す量として「電荷」というものを用意しておきます。電気の力をたくさん受けたり与えたりするなら電荷は大きい数字、電気の力をあまり受けたり与えたりしないならば電荷は小さな数字が対応します[1]。電気の力を全く受けない場合は電荷は 0。プラスの電気は電荷として正の数字、マイナスの電気には電荷として負の数字を対応させます。

それではひとつ目の大事な法則です。電荷と電場を関係づける法則、クーロンの法則です。

<u>クーロンの法則</u> (実験で確認された法則)

電荷 q が r だけ離れた位置に作る電場 $\vec{E}(r)$ は

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r \qquad \vec{e}_r \text{ は } \vec{r} \text{ 方向の単位ベクトル。} \frac{\vec{r}}{r} \text{ とも書く。}$$

と求められる。

これは電荷があるときにその周囲にできる電場を表した式です。もしくは「こう書けるものが電場である」という取り決めをしている式だと見なしても構いません。とにかく電場はこのように書ける量なのです。

[1]負の電荷については絶対値が大きいか小さいかと読み替えてください。

ここに出ている ϵ_0 というのは真空の誘電率などと呼ばれています。今のところは、この式が実験とうまく合うように帳尻あわせをするための数と思っておいてください。

このように電場が求められたら、電荷に働く力がわかる[2]のです。

$\longrightarrow$ 電場が $\vec{E}$ である位置に電荷 q' があるとき、q' にかかる力 $\vec{F}$ は $\underline{\vec{F}=\vec{E}q'}$ と求められる。

つまりイメージとしてはこんな感じ。電気の力を外に与える力を持っている物体が存在していると、その周囲には「電場」と呼ばれる得体の知れない能力が備わる。電荷というのは電気の力をどれだけ与えるかという量だから、その数に比例して空間は変化を受ける。そして、電場が存在している場所に別の電荷がやってきたら、その新しい電荷はそこの電場の影響を受けて、電場の大きさと自分が持つ電荷を掛け合わせた分の力を受ける。要するに電荷というのは、周囲にどれくらいの大きさの電場を作るか、また電場の影響をどれくらい受けるかという二つの側面があるわけです。

上で囲った公式を見てわかるとおり、電荷を持つ物体の近くでは電場は大きいのに対して、その物体から遠くに離れるほど電場は小さくなっていくということもわかります。遠くに離れるというのは距離 r が大きくなるということ。分母が大きくなれば、数としては小さくなりますね。

これらは比較的、常識的に理解できることだと思いますがどうでしょうか。

ひとつ実際に使ってみましょう。電荷がふたつ、離れておいてあるときにどれくらいの力を受けるか考えてみましょう。

電荷ふたつは q, q' とします。離れている距離は r としましょう。

まずは電荷 q が存在しているせいで、電荷 q' が受ける力というのを考えてみます。電荷 q が存在していると、その周囲には電場 $\vec{E}(r)$ が発生します。その大きさと向きは、公式から

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

となりますね。$\vec{e}_r$ というのは、電荷 q から電荷 q' を見た方向を指しています。

電荷 q から r だけ離れた位置に、電荷 q' が存在しているわけなので、この電荷 q' が受ける力というのは、

$$\vec{F}=\vec{E}(r)q'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{e}_r$$

ですね。これは公式を当てはめただけです。

[2]正確には「電荷を持つ物体に働く力がわかる」と表現するべきですね。ただ、いちいち「電荷を持つ物体」と書くのは煩わしいので、単純に「電荷」と表現してしまいます。電気の力を与えたり受けたりする量としての電荷を指しているのか、それともその電荷を持つ物体を指しているのかは適当に判断してください。

いまは電荷 q' が受ける力を求めました。次は逆に電荷 q が受ける力も求めてみましょう。電荷 q だけでなく、電荷 q' も電場を作っています。その電荷 q' が作った電場によって、電荷 q は力を受けるのです[3]。

電荷 q' が作る電場というのは、

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r^2}\vec{e_r}$$

ですね。さっきとは分子の q のところが変わっています。さらに $\vec{e_r}$ というのは、さっきと同じ文字を使いましたが、違うものを指しています。さっきは電荷 q から電荷 q' を見た方向でしたが、今度は逆 ——電荷 q' から電荷 q を見た方向を指しています。

この電場によって、電荷 q は力を受けます。電荷 q' から r だけ離れた位置に電荷 q は存在しているので、その受ける力は

$$\vec{F} = \vec{E}(r)q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'q}{r^2}\vec{e_r}$$

ですね。$q'q$ も qq' も同じ数なんで、電荷 q が受ける力と電荷 q' が受ける力の大きさは同じだってことがわかります。

同じ文字を使ってて紛らわしいですが、違うのは $\vec{e_r}$ の部分。q から q' を見た方向か、その逆か。つまり、働く力の方向は逆であるということです。これは力学でいうところの「作用反作用の法則」です。

以上でふたつの電荷の間に働く力についての説明は終わり。実は歴史的には、このふたつの電荷に働く力に関する式が先に発見された式です。そのため、「クーロンの法則」というと、$\vec{F} = ...$ の式を指す場合が多いです。ただここでは、歴史的な順序にはこだわらずに、電場の式の方を根本にある式だと考えて、そちらを「クーロンの法則」と呼んでおきます。

複数の電荷があるときの電場

クーロンの法則は、電荷があるときの電場を求めるための法則として、とても強力なものです。これはどんな風に電荷が存在しているときでも、適用することができます[4]。

けど先に書いたクーロンの法則は、一つの電荷が作る電場を求めるための式です。それじゃあ、たくさんの電荷が存在しているときはどうなるのか?と考えてみましょう。実はこれは単純。

> 電荷がたくさんあるときは…:
> 公式から出る電場を 全ての電荷について足し算 する (積分する)。

[3] ちなみに、自分が作った電場が自分自身に影響を与えるということはありません。

[4] どんなときでも使える代わりに、計算はちょっと複雑になることが多いです。逆に特定の場合にしか使えないけど、計算が楽…というやり方もあります。それが「ガウスの法則」。それについては次回の解説で扱いたいと思います。

足し算する、もしくは積分する。全ての電荷について足してしまうという意味で、どちらも同じことを指しています。これについては実際にやって慣れてください。

2.2　電位について

それでは今度は「電位」というものについて考えてみましょう。電位は電場の「渦なしの法則」なんかと一緒に解説されることが多いですが、ここではそういう理論的な話は省きます。ごく単純に電位というのは、エネルギーと関係が深い量だと説明しておきます。先に「電場がわかれば力がわかる」ということを見ていますね。それと同じように、電位がわかると、それに電荷を掛けてエネルギーが得られる…そんな量なんです。

> 電位：エネルギーを楽に求めるための表式。
> 電位を $\phi(r)$、電場を $\vec{E}(r)$ と書くと、$\underline{\vec{E}(r) = -\mathrm{grad}\phi(r)}$ という関係もある。

空間中に電荷が存在していると、その電荷の周りに変化が生まれて「電場」が生じる。またそれと同時に「電位」というのも生じているわけです。「電位」というのは電荷が存在しているために引き起こされる空間の性質。「電場」も電荷が存在しているために引き起こされる空間の性質ですが、それと違った見方をしているものが「電位」です。

電場も電位も「電荷が空間に及ぼす影響」を表してて、同じものを違った角度から見ているようなものです。そのために、電位がわかれば電場を求めることができます。その式が $\vec{E}(r) = -\mathrm{grad}\phi(r)$ という関係です。また、電場がわかればそこから電位を求めることもできます。その表式をこれから見ていきます。

さて、先に簡単に「電位はエネルギーを楽に求めるためのもの」だと書きました。それじゃあどうやってエネルギーと関係付けられるのかを見ておきましょう。

> 電荷 q から r だけ離れた位置に電荷 q' をおいておくのに必要なエネルギー: $U(r)$ を
> $$U(r) = \phi(r)q'$$
> とする。このように書ける量: $\phi(r)$ を電荷 q がつくる「電位」と呼ぶ。

電荷が一つだけ存在しているだけでは、エネルギーなんて考える必要ないです。電荷が二つあったとすると、同符号の電荷だったら反発し合うし、異符号の電荷だったら引きつけ合う。そんな反発したり引きつけあったりするもの同士を特定の場所に固定しておくには、エネルギーが必要です。そのエネルギーは、その状態に「蓄えられているエネルギー」だともいえます。これを物理では「静電エネルギー」と呼ぶこともあります。

特定の配置に電荷を留めておくのに必要なエネルギーが、静電エネルギー。その静電エネルギーと関係している量が「電位」です。電位の具体的な表式を求めるために、上で書いたエネルギーについて丁寧に考えてみましょう。

考えるエネルギーは「電荷 q から r だけ離れた位置に電荷 q' をおいておくのに必要なエネルギー」です。これは別の見方をすると「電荷 q が存在しているときに、別の電荷 q' を無限遠方から r という距離まで運んでくるときに必要な仕事」とも言えます。

仕事というのは、力×移動距離 ––つまり力を通る経路で積分すればいいわけです。電荷 q' にかかる力は、電荷 q が作る電場を $E(r)$ とすれば $E(r)q'$ です。これに逆らって (逆方向に力を掛けて) 電荷を移動させるわけですから、式で書くと $-\int_\infty^r E(r)q'dr$ という計算で仕事を求めることができます。これらをまとめると、

$$\begin{aligned} U(r) &= (q' \text{を無限遠方から運ぶときの仕事}) \\ &= -\int_\infty^r E(r)q'dr \\ &= \boxed{-\textstyle\int_\infty^r E(r)dr}\, q' \\ &\qquad \Leftarrow \phi(r) \end{aligned}$$

最後は、q' を積分の外に出しただけです。そして四角で囲った部分を $\phi(r)$ だと考えると $U(r) = \phi(r)q'$ となってて、うまくつじつまが合いますね。

つまり、電場がわかっているときの電位の求め方というのは、

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E(r)dr$$

なんですね。

電場がベクトルだったということを思い出す人は、積分するときの積分経路 (どういう道順で無限遠方から r という位置まで移動するか) の方向も気にしてください。ベクトルであることも気にして書けば、

> 電位 $\phi(r)$ は、 $\underline{\phi(r) = -\int_\infty^r \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}}$ と計算する。

となります。ベクトル $\vec{E}$ とベクトル $d\vec{r}$ の内積を積分するわけです。これはクーロンの法則の式と同じく、大事な式。電位を求めるための公式として、覚えておいてください。

電荷が複数あるときは、これまた全ての電荷について足してしまえば、そのときの電位が求められます[5]。

[5]電荷が複数あるときの電位と静電エネルギーの間の関係は、電荷が二つあるときとは少し変わってきます。それについては、4 節の解説で扱う予定です。

2.3　ここまでのまとめ

電荷が存在すると、その周囲に電場と電位が生じる。電場も電位も同じものを違った見方をしているだけなので、片方がわかれば他方も計算できる。

電荷 q が r だけ離れた位置に作る電場 $\vec{E}(r)$ は：

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

ただし、$\vec{e}_r$ は $\vec{r}$ 方向の単位ベクトル。

電場 $\vec{E}(r)$ がわかっているときの電位 $\phi(r)$ の計算法：

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

電位 $\phi(r)$ がわかっているときの電場 $\vec{E}(r)$ の計算法：

$$\vec{E}(r) = -\mathrm{grad}\phi(r)$$

2.4　*問題練習

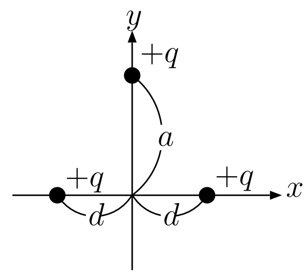
問題 7 (点電荷に働く力、点電荷のつくる電場)

原点に点電荷 q がある。

(1) この点電荷が r だけ離れた位置につくる電場 $\vec{E}$ を求めよ。
(2) 原点から a だけ離れた位置にも点電荷 q があるとする。そのとき、この新しい電荷にかかる力 $\vec{F}$ を求めよ。
(3) 二つの電荷が無限に離れた状態と比較して、a だけ離れた点に電荷を持ってくるにはどれだけのエネルギーが必要だろうか。そのエネルギーを求めよ。
(4) 点電荷 q が原点にあるとき周囲にできている電位 $\phi(r)$ を求めよ。ただし原点からの距離を r とする。
(5) 原点に点電荷 q があり、原点から a だけ離れた位置に別の点電荷 $-q$ を固定しておく。このとき蓄えられている静電エネルギー U を求めよ。

問題 8 (複数の電荷がある場合)

2 次元平面 (x, y) 上、$(-d, 0)$, $(d, 0)$ の位置に電荷 $+q$ を設置した。このとき、



(1) $(0, a)$ の位置にできる電場 $\vec{E}$ を求めよ。
(2) $(0, a)$ の位置にも $+q$ の電荷を置いたとき、この電荷にかかる力 $\vec{F}$ を求めよ。
(3) $(0, a)$ の位置の電位 ϕ を求めよ。
(4) $(0, a)$ の位置に電荷 $+q$ を置いておくのに必要な仕事 (つまり静電エネルギー) U を求めよ。

* *
*
*

電荷が複数あるときは、それぞれの電荷が作る電場を足し算すればいいわけです。ベクトルの足し算だということに注意してください。わかりにくいときは、それぞれの電荷が作る電場の x 成分と y 成分をそれぞれ求めて、成分同士を足し算する…としてみてください。

電位は電場を無限遠方から考えている位置まで積分するわけですね。積分する道順として、計算しやすい道順を選びましょう。電場の向きと同じ向きを選ぶと計算しやすいです。つまり y 軸上の無限遠方から $y = a$ という位置まで積分するわけです。

*
* * *

問題 9 (電荷が連続的に分布している場合)

x 軸上、$x = -\ell \sim \ell$ の区間に一様に電荷が分布している。その電荷密度を ρ として、y 軸上にできる電場 $\vec{E}(y)$ を求めよ。

* *
*
*

これは電荷が連続的に分布している場合。x 軸上 $-\ell \sim \ell$ に隙間なく電荷が存在している場合です。こんなときは、x 軸上の小さな長さ dx を考えて、その小さな長さの中に電荷がどれだけ存在するかと考えます。そして、dx という小さな長さの電荷が、$-\ell$ から ℓ までの間にびっちり存在していると考えましょう。それらを全て足し上げる…つまり積分するわけです。

この結果を使えば、次の問題が解けるはずです。

*
* * *

問題 10 (無限に長く分布した電荷が作る電場)

x 軸上に電荷が一様分布している。その電荷密度を ρ として、y 軸上にできる電場 $\vec{E}(y)$ を求めよ。

問題 11 (電荷が連続的に分布している場合 2)

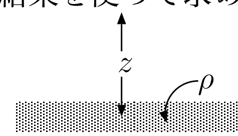
(1) 半径 r の輪に一様に電荷が分布している。その電荷密度を ρ として、輪の中心から上に z だけ離れた点につくられる電場 $\vec{E}$ を求めよ。
(2) 半径 R の円盤上に一様に電荷が分布している。その電荷密度を ρ として、円盤の中心から上に z だけ離れた点につくられる電場 $\vec{E}$ を求めよ。

((2) は (1) の結果を用いるとよい)

(1)　　　　　　　　　　(2)

問題 12 (無限に広がった平面状電荷のつくる電場)

無限に広い平面上に、一様に電荷が分布している。その電荷密度を ρ として、その平面から垂直に z だけ離れた点につくられる電場 $\vec{E}$ を 問題 11 の結果を使って求めよ。



∗ ∗
∗
∗

問題 10 と 問題 12 は、それぞれ前問の結果を使えば計算できます。クーロンの法則を使って、難しい電場を求める練習です。
このようにクーロンの法則を使うと計算はやっかいになるけど、どんな電場でも求めることができます。実はこれと同じ問題をガウスの法則を使って解くこともできます。ガウスの法則は特定の状況にしか使えないけど、計算は楽ちんです。どれくらい計算が楽かを比較するために、クーロンの法則では計算が大変だった…ということだけ覚えといてください。

∗
∗ ∗ ∗

第3章　ガウスの法則

それでは今回はガウスの法則について説明したいと思います。ガウスの法則は電磁気学を勉強する上で、とても大事な方程式です。だけどこの授業は演習の授業なので、ガウスの法則についての厳密な話はしません。それは別の機会に学んでください。ここでは大雑把にガウスの法則ってのはどんなものなのか、またどんな風に使えるものなのかってことを話したいと思います。

ちなみに別の授業で「ガウスの定理」というのをやってるかもしれません。ガウスの "定理" とガウスの "法則" は別物ですから注意してください。どちらも同一人物のガウスさんが発見した定理だったり法則だったりしますが、内容は違ったものです。

3.1　電場の求め方2(ガウスの法則)

ガウスの法則とは何か。それをはじめに書いておきます。それは

ガウスの法則：電場と電荷の間に成り立つ関係式

となります。

ガウスの法則とは電場と電荷間に必ず成り立つ関係式です。どんなときでも成り立つということで、これは電磁気学の基本となる方程式のひとつです[1]。つまりとても大事な方程式ということ。だけど、これに関する詳しい説明は省略します。どんな関係式かをいきなり書いてしまいます。

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

です。いきなり記号を使っていますが、

$$\begin{cases} \vec{E} & : & \text{電場} \\ \rho & : & \text{電荷密度} \end{cases}$$

というものです。ϵ_0 は真空の誘電率。適当な定数だと思って結構です。こういう関係式が、常にどんなときでも成り立っているというわけです。

元々の歴史的な流れを考えると、前回やったクーロンの法則が電場と電荷の関係を表す初めて発見された関係式でした。クーロンの法則ははじめに予想され、さらに実験でちゃんと確認された式です。クーロンの法則は十分に正しいだろうと信頼できるものです。そ

[1]電磁気学の基本となる方程式はマクスウェル方程式といって、全部で 4 つあります。

してそのクーロンの法則が正しかったとすると、電場と電荷密度の間には上で書いた関係式が必ず成立するということをガウスさんが示したわけです。

歴史的にはクーロンの法則の方が基本的な式じゃないかって考えることも、あながち間違った考え方だとはいえません。ただ、数学的にいろいろ書き直しやすい式を考えようとしたとき、クーロンの法則はそれ以上書き換えにくい形をしています。それに対して上で書いたガウスの法則の式は、数学をやっている人にとってはとても書き換えやすい形になっています。そんなわけで「ガウスの法則」の式が世の中の根本にあって、それを書き換えて、いろいろな状況に対して当てはめ、電場を求めようと考えます。

そういうわけで、ガウスの法則はとても大事な方程式です。電磁気学における基本方程式のひとつになるわけですが、それがどんな風に大事かって話は別の教科書に譲ります。ここでは、その使い方に重点を置きたいと思います。

使い方に重点を置くといっても、上で書いた形の式は、実は使いにくいんですね。もっと使いやすい形にしておきます。

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Big\downarrow \ \text{(積分形で書くと)}$$

$$\int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dv$$

この最後の式が「積分形のガウスの法則」です。今日の演習では、この積分形のガウスの法則の使い方を説明しますので、是非、覚えて帰ってください。いきなり記号を導入していますが、V とか ∂V というのは

$$\left(\begin{array}{ccc} V & : & \text{任意の立体} \\ \partial V & : & \text{立体}\,V\,\text{の表面} \end{array}\right)$$

です。

微分形のガウスの法則と積分形のガウスの法則は互いに自由に書き換えることができます。別の授業で「ガウスの定理」というのを知っている人は、この書き換えを自分でもやってみてください。ガウスの定理というのは、ここの書き換えを行うために必要な関係式なんです[2]。ただまあ、ここではその書き換えについては説明しません。余力のある人が挑戦してください。証明はとても単純です。

さて、上で書いた積分形のガウスの法則を使いましょう。そのためにこの式をもうちょっとよく見てみることにします。この式はどんな意味なのか。

[2]ガウスの定理は数学的な等式で、どんなときでも厳密に成り立つものです。それに対してガウスの法則というのは、数学ではなく物理の話。電場ベクトルと電荷の間に成り立つ関係式のことを指しています。これもこの世の中のどんなときでも成り立つと信じられていますが、それは実験事実を踏まえた結果、そうだと信じられているものなのです。

ガウスの法則の意味 (日本語訳?):

$$\left(\begin{array}{l}\vec{E}\text{ をある立体の}\\ \text{表面で表面積分}\end{array}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\begin{array}{l}\text{その立体の内部に存在する}\\ \text{電荷をすべて足したもの}\end{array}\right)$$

こんな関係が、任意の立体、つまり「どんな立体についても」成立するというわけです。

これが「どんなとき、どんな立体についても成立する」ってことが、とても大事。つまりガウスの法則という関係式がどんなとき、どんな立体についても成立するから、

→ この関係式から、(特定の場合に) 電場を求めることができる。

というわけなんです。

ガウスの法則は電磁気学ではとても大切な方程式です。だけど、それだけでなく、問題を解こうというときにも、便利な方程式なんです。これを利用すると、どんなときでもできるってわけじゃないけど、電場を楽に求めることができるというわけです。

電場の求め方としては前回、クーロンの法則を説明しています。

クーロンの法則はどんなときにも使える式です。だからとてもパワフル。それなりに便利です。だけど前回の問題を解いた人は「計算 (積分) がとても大変になる」ってこともわかってると思います。

それに対してガウスの法則を利用したやり方は、どんなときにも使えるというわけではありません。特定のときにしか使えません。だけど、使えるときは計算がとても楽ちんです。どんなときにも使えるわけではないけど、計算が楽。それがガウスの法則を利用したやり方です。

ぜひガウスの法則とクーロンの法則の両方を、時と場合に応じて使い分けられるようになってください。

ガウスの法則の使い方

それではガウスの法則を使って電場を求める手順です。参考にしてみてください。

さてガウスの法則の式を思い出してみると、

$$\int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dv$$

でした。この式はどんな立体 V についても成立します。そしてこの両辺を眺めてみましょう。右辺は立体 V の中身全体での積分——体積積分——です。そして左辺は立体 V の表面での積分、つまり面積分です。

体積積分と面積分を比較すると、体積積分の方が計算しやすいと感じるはずです。面積分の方は場合にもよるけど、計算しにくいことが多いです。そこで、ガウスの法則はどんな立体に対しても成立するということを利用して、「面積分がやりやすいような立体を

使って、ガウスの法則を適用する」ことにしましょう。これが今回お話しする手順のミソとなる部分です。

> 使い方 : 面積分しやすい立体を見つける

それじゃあ、積分しやすい立体をどうやって求めたらいいのか、という手順を考えていきましょう。まずはこれ。

> 使い方 : 面積分しやすい立体を見つける
> 1. 電場のおよその形を予想する。

電場のおよその形を予想する。電場というのはベクトルですから、およその形というのは、電場のおよその大きさと方向。ある位置の電場がどんな方向を向いていてどんな大きさを持っているか予想してください。問題設定から、電荷がどんなところに分布しているかは、すでにわかっているはずです。その電荷の分布の仕方をみて、予想してください。

そんなこといったって予想できないよ、という人はいますか? 確かにどんなときでも予想できるわけではありません。それにこれには慣れが必要です。それじゃあ予想できないときにはどうしたらいいのかというと、答えは単純です。「およその形で予想できない問題は、ガウスの法則は使えないので、クーロンの法則を使って電場を求める」ということです。クーロンの法則は、どんな電荷分布の時にも使えますから、計算は大変になるでしょうが頑張ってください。

とにかくガウスの法則を使うための第一の難関、またこれができたら作業の7，8割は終えたといえるくらい大事な作業が、電場のおよその形(ベクトルの大きさと方向)を予想するということです。

そして電場のおよその形が予想できたとしましょう。そうしたら早速その結果を使いましょう。

> 使い方 : 面積分しやすい立体を見つける
> 1. 電場のおよその形を予想する。
> 2. 電場の大きさが同じであるような面で、電荷を囲む。その囲まれた部分が立体 V。

ガウスの法則は、電荷をうまく面で囲まないと使えません。面で囲めたら、その囲まれた部分を立体 V だと考えます。そしてどんな面で囲むかというと、面積分がしやすいような面。面積分は

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

でしたね。これは $|\vec{E}|$ が等しい —— $|\vec{E}|$ が積分する面の位置に依らない —— ようなとき、簡単に積分できます。そんなときはつまり、$|\vec{E}|$ の部分を積分の外に出すことができるわけですね。そして積分は楽になるというわけ。

さて、そのように積分しやすい立体 V がわかったとすると、あとはガウスの法則を適用して、電場を求めるだけ。

使い方 : 面積分しやすい立体を見つける 1. 電場のおよその形を予想する。 2. 電場の大きさが同じであるような面で、電荷を囲む。その囲まれた部分が立体 V。 3. ガウスの法則を適用して、$|\vec{E}|$ を求める。 ($\vec{E}$ の方向については予想する)

というわけです。ただし最後に書いておきましたが、この方法で求められるのは電場ベクトルの大きさだけです。それじゃあ方向はどうするのかというと、方向は求められないので、手順 1. で予想した方向をそのまま当てはめちゃいます。

そういうふうに方向が予想できないときはどうしたらいいか。手順通りに計算してみたら、摩訶不思議な結果になってしまったときはどうしたらいいか。その答えも単純です。「そんなときはガウスの法則で電場を求めることはできない」ということ。「諦めてクーロンの法則で計算する」ことになります。

以上がガウスの法則を利用して電場を求めるためのやり方です。

3.2 例をひとつ : 点電荷

話を聞いているだけでは、いまいちピンと来ないかもしれないので、ひとつ例をやってみましょう。一番単純な例を考えます。——つまり、点電荷が作る電場についてです。

例題

点電荷 q から r だけ離れた位置にできる電場 $\vec{E}$ を求めよ。

点電荷 q がひとつだけ空間中に存在している。そんなときにどんな電場ができるか。

残念ながら、私たちはもう答えを知っています。クーロンの法則そのまんまです。だけどそのことをしばらく忘れましょう。なにも知らない状態、そしてガウスの法則だけを知っている状態で、どこまで考えられるかみてみましょう。

さあガウスの法則を利用して電場を求めます。そのための手順に従って考えていきましょう。

まず手順 1. として「電場のおよその形を予想する」でした。空間中に点電荷がひとつだけ、ポツンと存在しています。そうすると、その状態というのは、どんな方向から眺め

ても同じ状況に見えるはずです。そうだとすると、まず電場の方向ですが、電場は電荷から全ての方向に等しく出ているのではないか、と予想できると思います。つまり電荷を中心とする放射状にベクトルは伸びているんじゃないかと考えるわけです。常識的に考えれば、こういう予想をすることも不可能ではないはずです。これが電場の方向の予想です。

そして電場の方向だけでなく、電場のおよその大きさについても予想しましょう。電場の大きさですが、これはきっと「電荷に近ければ近いほど、大きいのではないか」「電荷から離れれば離れるほど、電場は小さくなるのではないか」と予想しましょう。これも常識的な予想でしょう。電荷から離れるほど電場が強くなるなんて不気味です[3]。まあそこまで予想できないとしても「電場の大きさは電荷からの距離に依存する」ということを予想してください。電荷からの距離に応じて電場の大きさは変わるだろう——言い方を変えると「電荷からの距離が同じならば電場の大きさは同じになるはず」と予想します。

予想	○ $\vec{E}$ は点電荷から放射状の方向 ○ 電荷からの距離が同じなら、$\vert\vec{E}\vert$ は同じ

このように予想したなら、手順2. に移ります。「電場の大きさが同じであるような面で電荷を囲む」です。

電荷からの距離が同じならば電場の大きさは同じになるはずだと予想しました。そこで、

$\longrightarrow$ <u>点電荷からの距離が同じである面</u>で電荷を囲む。
(→ つまり点電荷を中心とする球面)

ということにしましょう。これが立体 V です。立体 V は点電荷を中心とする球面です。その球面の半径を r と書いておくことにします[4]。

さて、立体 V も決まったとすると、あとは手順3. だけです。「ガウスの法則を適用する」ということ。やってみましょう。

まずはガウスの法則の左辺の計算です。左辺は $\vec{E}$ の面積分でした。

$$(\text{左辺}) = \int_{\text{球面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \qquad = |\vec{E}| \cdot 4\pi r^2$$

積分する面というのが $|\vec{E}|$ が一定であるような面ですから、$|\vec{E}|$ を積分の外に出す。残った部分は、球面の表面積になります。だから $4\pi r^2$ を掛けるだけ。

左辺の計算ができたら、次は右辺。右辺は $\dfrac{1}{\epsilon_0}\displaystyle\int_V \rho dv$ という式で書いていたけど、これよりも言葉の方で覚えてください。

[3]電荷から離れるほど電場が強くなるなら、宇宙の遙か彼方に存在する電荷が作る電場の大きさがめちゃくちゃ大きいことになってしまいます。そんな体験はしたことないはずです。

[4]別に r でなければならない理由はありません。a でも b でもなんでもいいんです。ただ最終的には「点電荷から r だけ離れた位置の電場」を求めたいので、考える球面の半径を r としました。ガウスの法則を使うと、法則を適用した立体の上での電場の大きさが求められるのです。

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{\epsilon_0}\begin{pmatrix}\text{その立体の内部に存在する}\\ \text{電荷をすべて足したもの}\end{pmatrix} \quad = \frac{1}{\epsilon_0}q$$

いまの場合、立体 V——つまり球——の内部にある電荷というのは、点電荷 q ひとつだけでした。つまり、右辺は単純にそれを ϵ_0 で割ったものになります。

これで左辺の計算も右辺の計算も終わりました。あとはこの左辺と右辺の結果を結ぶだけ。

ガウスの法則より、

$$4\pi r^2|\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0}q$$

となります。両辺を $4\pi r^2$ で割ることにしましょう。結果は

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

となります。この式は、ちゃんとクーロンの法則と同じものになっていますね。

ただこの方法では電場の大きさまでしか求まりません。あとは予想に従うだけ。点電荷から放射状に出ている方向を $\vec{e_r}$ と書くことにしましょう。そして例題の答えとして求める $\vec{E}$ というのは、

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e_r}$$

となるわけです。

3.3 面積分を少し丁寧に

電場が同じになる面で電荷を囲めば、面積分が簡単に計算できる。だからそんな面で電荷を囲んでガウスの法則を適用しよう——というのが、いま見てきたやり方です。

それではその面積分はどのように簡単になっているのか、ちょっとゆっくり見てみましょう。

先に $\vec{E}$ の大きさと方向を予想しています。大きさを $|\vec{E}|$ と書いて、方向を $\vec{e}$ と書くことにしましょう。つまり、

$$\vec{E} = |\vec{E}|\,\vec{e}$$

ですね。これを面積分の式に代入すると、

$$\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial V}|\vec{E}|\,\vec{e}\cdot d\vec{S}$$

です。さらに $d\vec{S}$ というのがなんだったかというと、これは面要素ベクトル。ベクトルなので大きさと方向を持っています。

$$d\vec{S} = \begin{cases}\text{大きさ} & : \quad \text{微小面積 } dS\\ \text{方向} & : \quad \text{積分しようとしている微小面の法線方向}\end{cases}$$

です。これはこういう約束事なので、そういうもんだと思ってください。

積分しようとしている微小な面の法線方向を $\vec{n}$ と書くことにしましょう。この $\vec{n}$ は、積分していく最中、それぞれの位置ごとに違った方向になるということには注意してください。とにかくこの式も代入します。つまり $d\vec{S} = \vec{n}\,dS$ なので、

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\partial V} |\vec{E}|\,\vec{e} \cdot d\vec{S} \\
&= \int_{\partial V} |\vec{E}|\,\vec{e} \cdot \vec{n}\,dS
\end{aligned}
$$

です。積分する面 ∂V の上では、$|\vec{E}|$ が一定であるように面を選びました。なので、積分の外に出しましょう。

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{\partial V} |\vec{E}|\,\vec{e} \cdot d\vec{S} \\
&= \int_{\partial V} |\vec{E}|\,(\vec{e} \cdot \vec{n})\,dS \\
&= |\vec{E}| \int_{\partial V} (\vec{e} \cdot \vec{n})\,dS
\end{aligned}
$$

つまり、今回の面積分で大事になるのは $\int_{\partial V}(\vec{e}\cdot\vec{n})dS$ という部分ですね。特に被積分関数である $(\vec{e}\cdot\vec{n})$ という部分が大事。

この内積が 1 になるような場合を考えてみます。つまり、電場ベクトルの方向と積分する面の法線方向が「同じ向き」である場合です。すると計算式は

$$
\int_{\text{積分したい面}} 1\,dS
$$

ですが、この答えというのは

$$
\int_{\text{積分したい面}} 1\,dS = \text{積分したい面の面積}
$$

になります[5]。これは積分がそういう性質を持つものだということで納得してください。つまり内積が 1 になるとき——電場ベクトルの方向と積分しようとしている面の法線方向が同じであるとき——は、面積分がとても簡単になりますね。

だからガウスの法則を適用する面を考えるときは、電場ベクトルの (予想した) 方向と積分しようとしている面の法線方向は同じになるように、面を作りましょう。

しかし実はこれだけで電荷を囲もうとしても、まだ不十分なときがあります。

[5] 普通は被積分関数の 1 は省略して書かないので、$\int dS$ と書くのが普通です。

上で書いた式

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} &= \int_{\partial V} |\vec{E}|\,\vec{e}\cdot d\vec{S}\\ &= \int_{\partial V} |\vec{E}|\,(\vec{e}\cdot\vec{n})dS\\ &= |\vec{E}|\int_{\partial V}(\vec{e}\cdot\vec{n})dS\end{aligned}$$

ですが、$\vec{e}\cdot\vec{n}=1$ のとき以外でも、簡単に積分できる場合があります。

それはどんなときかというと、

$$\vec{e}\cdot\vec{n}=0$$

となるときです。こんなときは、積分される関数が常に 0 ということ。0 はいくつ足しても 0 のままなので、このとき積分の結果は 0 になります。こんなときも積分の計算はしやすいですよね。内積が 0 になる——つまり、電場ベクトルの方向と積分したい面の法線方向が直交する——ときも計算しやすいのです。まとめると、

$$\int_{\text{面}}(\vec{e}\cdot\vec{n})\,dS = \begin{cases} \text{積分した面の面積} & (\vec{e}\cdot\vec{n}=1)\\ 0 & (\vec{e}\cdot\vec{n}=0)\end{cases}$$

となります[6]。もちろん内積が 0 や 1 以外の値をとることだってあるでしょう。積分しようとする面によってはそんなことも起こります。だけど、ガウスの法則を適用するときにそんな計算しにくい面は「はじめから考えない」ことにしましょう。

つまりガウスの法則を適用するための面(面積分をやりやすい面) を考えるときは、予想した電場ベクトルの方向を踏まえて「その電場ベクトルの方向と法線方向が同じ方向になるような面」と「電場ベクトルの方向と法線方向が直交するような面」のふたつを組み合わせて、電荷を囲んでください。

それがガウスの法則を利用して電場を求めるコツです[7]。

3.4 *問題練習

それでは問題を解いてみてください。ガウスの法則を利用できるパターンというのは、だいたいこんなもんです。

問題 13 (Gauss の法則と電位 / 無限に長く分布した電荷)

無限に長い棒状に電荷が分布している。電荷の分布している向きを z 軸方向として、電荷の分布密度を ρ としたとき、

[6] 内積が 0 になる場合については、$|\vec{E}|$ が必ずしも一定でなくても構いません。$|\vec{E}|$ を積分の外に出せなくても $\vec{e}\cdot\vec{n}=0$ ならば、面積分した結果は 0 になります。

[7] ガウスの法則のもっと深い意味や使い方を知りたい人は、ぜひ別の教科書で勉強してください。

(1) z 軸からの距離を r として、この電荷によって作られる電場 $\vec{E}$ を求めよ。
(2) z 軸から r_1 だけ離れた点と r_2 だけ離れた点の電位差を求めよ。

＊＊
＊
＊

r_1 と r_2 の位置での電位差は

$$\Delta\phi = -\int_{\infty}^{r_1} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} - \left(-\int_{\infty}^{r_2} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}\right)$$

と計算するのですが、r_2 を基準にした r_1 の電位として

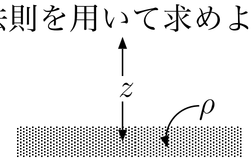
$$\Delta\phi = -\int_{r_2}^{r_1} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r}$$

と覚えておくと、楽ができます。これは積分範囲を合成しているだけですね。

＊
＊＊＊

問題 14 (Gauss の法則 / 無限に広がった平面状電荷)

無限に広い平面上に、一様に電荷が分布している。その電荷密度を ρ として、その平面から垂直に z だけ離れた点につくられる電場 $\vec{E}$ を Gauss の法則を用いて求めよ。



＊＊
＊　この問題と問題 13 は、クーロンの法則を使っても求めたことがあるはずです。
＊　しかしガウスの法則を使って求めた方が、計算はずっと楽だと思えるはずです。

＊
＊＊＊

問題 15 (Gauss の法則と電位 / 金属球に分布した電荷)

真空中に半径 a の金属球 (導体) がある。その金属球には $+Q$ の電荷が蓄えられている。

(1) 導体の内部には電場は存在しない[8]。そのため、電荷は金属球の表面に一様に分布することになる。金属球の表面での電荷分布密度を求めよ。
(2) 球の中心から r だけ離れた点での電場 $\vec{E}$ と電位 ϕ を求めよ。ただし $r = a$ での電場は特に考察しなくてよい。
(3) (2) で求めた電場の大きさ $|\vec{E}|$ と電位 ϕ を、横軸に r をとってグラフに描け。

[8] もし電場が存在したら導体内部で電位差が発生してしまう。

* *
* 電位を求めるには、とにかく
*

$$\phi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

と計算するだけです。つまり電位を求めるには、先に電場をしっかり求めておかないといけないということです。
また、r の範囲に応じて電場 $\vec{E}(r)$ の形が異なるときは要注意です。そのときは積分範囲を分解して、それぞれの範囲について $\vec{E}(r)$ を積分するようにしましょう。

この問題では、導体の中か外かによって電場の形は違ってきますので注意してください。

*
* * *

3.5 *問題練習2

ガウスの法則を使う基本的な問題に慣れたら、ぜひ微分形のガウスの法則と積分形のガウスの法則の間を自由に行き来できるようになってください。必要なのはガウスの定理だけです。

問題16 (Gauss の法則)

次の等式を「ガウスの定理」と呼ぶ。$\vec{F}$ を任意のベクトルとして、

$$\int_V \mathrm{div}\vec{F} dv = \int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

ここで、左辺は任意の立体 V 内での体積積分を表し、右辺はその立体の表面 ∂V 上での面積分を表す。

このとき、

(1) 電場に関するガウスの法則の微分形: $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ から、積分形: $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$ を導け。

(2) 電場に関するガウスの法則の積分形: $\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dv$ から、微分形: $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ を導け。

第4章　コンデンサーと静電エネルギー

前回と前々回の2回で、電荷の配置がわかったときの電場の求め方を勉強しました。それでは次に「磁石の力」についてお話を…としてもいいんですが、もうちょっと練習をしてから、磁石の力の話に移ることにしましょう。

今回はコンデンサーというものと、帯電している物体が持つ静電エネルギーについて説明します[1]。

4.1　コンデンサー

コンデンサーとは特別な形状をした導体の組み合わせで、電荷を溜めておくための装置です。

真空中に点電荷がぽつんと置いてあったとしましょう。そのとき、その電荷はどこからも力を受けないので、それはそのまま居続けるでしょう。ここでもし同じ電荷を持つ点電荷が、近くにやってきたとします。そしたらどうなるでしょう。お互いの点電荷同士が反発し合って、どちらも遠くへ飛んでいってしまうでしょうね。では、正負の符号が違う電荷同士だったら、どうでしょうか。これはお互いが引き寄せ合って、どちらの点電荷にとっても居心地がいい状態になります。

つまりコンデンサーは電荷を溜めておく装置だと言いましたが、最も単純なタイプとして「2枚の導体板を平行に近づけて固定しておく」というものを考えることができます。導体板が接してしまってはいけないけれど、すぐ近くに固定しておくことにします。片方の板に正の電荷が溜まっていたら、向かい合わせの導体板には負の電荷が溜まるようにしておくと、お互いの電荷が引きつけ合う効果によって、電荷をそこに蓄えておくことができるわけです。

コンデンサー：向かい合った導体同士で電荷を溜めておく装置

導体板と言いましたが、これを「極板」と呼ぶことにしましょう。片方の極板に電荷が Q だけ留められていたとします。そのとき、もう片方の極板に存在している電荷の量がどれだけになるか、想像できるでしょうか? これは、符号だけ替えた $-Q$ の電荷がそこに

[1]早く電磁気学の全体像が知りたい!磁石の力について気になってしょうがない!という方は、この章を飛ばして次に行っても問題ありません。

留められることになります。極板には電荷が密集することになりますから、極板の中では電荷 (電子) 同士は互いに反発し合いますね。それなのに電荷が散り散りにならないのは、向かい合わせの極板にある符号違いの電荷によって引き寄せられているからです。引き寄せてくれる電荷の量よりたくさんの電荷が、そこに止まることはできないんです。

このように、それぞれの極板に $+Q$ と $-Q$ の電荷が留められているとき、そのコンデンサーには「電荷 Q が蓄えられている」と表現します。電荷 Q と言っただけで、片方の極板に $+Q$、他方の極板に $-Q$ の電荷が存在しているとわかるわけです。

さてそんなコンデンサーですが、極板の大きさ、極板間の距離に応じて、どれだけの電荷を蓄えることができるか違ってきますね。さらに極板の材質にも依るでしょうし、なによりいま話した単純な仕組みじゃなくて、もっと複雑な仕組みのコンデンサーだったりしたら、蓄えられる電荷の量はバラバラです。

そこで「コンデンサーの性能を示す数値」を用意しましょう。このような数字を考えます。

コンデンサーの「容量」: C (コンデンサーの性能を示す数値)

蓄えられた電荷を Q、極板間の電位差を $\Delta\phi$ として、

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}$$

という計算で求める。

このような“容量”という数字がコンデンサーの性能を示す数値です。容量が大きければ、少ない電位差でたくさんの電荷を溜めることができる。容量が小さいコンデンサーは、あまりたくさんの電荷を溜めておくことはできない…というわけです。

電気回路では、この電荷を一時溜めておく装置“コンデンサー”はとても大事になってきます。ですが、そういった話は電気回路の話として別のところで聞いてください。今回は、単純にいくつかの形のコンデンサーの「容量」を計算する練習をしてみたいと思います。

4.2　コンデンサーの容量の求め方

マニュアル化しすぎるのは良くないかもしれませんが、一応手順をまとめておきましょう。

コンデンサーの容量の求め方 (手順)

1. 極板間の電場 $\vec{E}$ を求める。(ガウスの法則?)
2. 極板間の電位差を求める。極板の位置を A と B と表記したら、

$$\Delta\phi = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

という計算で求められる。
3. 求めた電位差 $\Delta\phi$ で、蓄えられている電荷の総量 Q を割る。

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}$$

電荷の分布の仕方は、すでにわかってるものとします。つまり蓄えられる電荷 Q は先にわかっている状態です。

電荷配置がわかっていれば、電場を求めることはできますね。それは前回と前々回でやった話です。問題として出題されるときは、ガウスの法則が使える便利な問題が多いかもしれません。そうでなければクーロンの法則から、電場を求めましょう。

電場が求められたら、そこから電位を計算することもできますね。これは前々回にやったと思います。電場を無限遠方から特定の距離まで積分したものが電位です。

$$\phi_A = -\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

これは極板 A の位置の電位。極板 B についても同じく

$$\phi_B = -\int_\infty^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

と書けますね。電位差というのは、この 2 つの量の引き算だから、

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{r} - \Big(-\int_\infty^B \vec{E} \cdot d\vec{r}\Big) \\
&= +\int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_\infty^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
&= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}
\end{aligned}$$

となります。この最後の式で計算するならば、空間全体の電場 $\vec{E}$ がわからなくても、極板間の電場さえわかれば計算できるので、便利です。

ここまで計算できたら、蓄えられる電荷と電位差の両方がわかったのだから、あとは容量と呼ばれる量を計算するだけ。

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi}$$

という量を容量と呼んでいるのでした。

4.3　コンデンサーに蓄えられるエネルギー

そろそろ実際に手を動かして計算してみたくなってるかもしれませんね。だけど先にあと一つ。コンデンサーに蓄えられるエネルギーのお話をしておきます。

これには、2つの点電荷を特定の距離だけ離して置いておくときに蓄えられる静電エネルギーを思い出しましょう。そもそも電位というのは、エネルギーを楽に求めるためにあらかじめ計算しておこうとしていた量でした。その地点での電位に電荷を掛け算すれば、2つの点電荷の静電エネルギーは計算できますね。

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \text{(2つの点電荷)} & \\ \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \text{の静電エネルギー} &= \begin{bmatrix} \text{電荷 } q_1 \text{ があって、} \\ \text{無限遠方から電荷 } q_2 \text{ を} \\ \text{運んでくるときに必要な仕事} \end{bmatrix} \\
&= -\int_{\infty}^{\text{考えてる位置}} q_2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
&= q_2 \times \left(-\int_{\infty}^{\text{考えてる位置}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \right) \\
&= q_2 \phi_2
\end{aligned}
$$

となります。なお、ここで ϕ_1 というのは点電荷 q_1 が存在している位置での電位、ϕ_2 というのは点電荷 q_2 が存在している位置での電位を表しています。

上に書いた式では、電荷 q_1 が存在しているときに、無限遠方から電荷 q_2 を持ってくるという操作を考えました。電場が $\vec{E}$ のとき、電荷 q_2 には $q_2\vec{E}$ という力が働きます。その力に逆らって、積分をしてくるわけです。

だけどこれ、逆の視点で見ることもできますね。つまり、先に電荷 q_2 があって、あとから電荷 q_1 を運んできた…とみても同じ状況を作り出せます。つまり、

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \text{(2つの点電荷)} & \\ \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \text{の静電エネルギー} &= \begin{bmatrix} \text{電荷 } q_2 \text{ があって、} \\ \text{無限遠方から電荷 } q_1 \text{ を} \\ \text{運んでくるときに必要な仕事} \end{bmatrix} \\
&= -\int_{\infty}^{\text{考えてる位置}} q_1 \vec{E} \cdot d\vec{r} \\
&= q_1 \phi_1
\end{aligned}
$$

と書くことも可能ですね。2つの点電荷の配置に蓄えられているエネルギーを U と書くことにすると、

$$
U = q_1 \phi_1
$$

であるのと同時に、

$$U = q_2\phi_2$$

であるわけです。このどちらの計算をしても、同じ結果が出てきます。

同じ結果が出てくるならば、まあ計算しやすい方で計算すればいいわけですが、なんか電荷 1 だけに注目したり電荷 2 だけに注目したり、どうも式の形が落ち着かないなぁと思って、思い切ってこの 2 つの式を足し算してしまいましょう。そうすると、

$$2U = q_1\phi_1 + q_2\phi_2$$

となりますね。両辺を 2 で割り算すれば、

$$U = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2)$$

という表式が出てきます。なんとなく、電荷 1 と電荷 2 が平等に扱われているようで、気持ちよくはないですか? この式も、先に書いてた $U =$ の式と同じ結果を与えます。そしてコンデンサーに蓄えられるエネルギーを考えるときは、この最後の形を利用します。

コンデンサーは片方の極板に $+Q$、他方の極板に $-Q$ の電荷が蓄えられています。そして、それぞれの極板での電位を ϕ_A, ϕ_B と表記することにしましょう。コンデンサーの極板はもちろん大きさを持っていますが、回路全体で眺めてみればほとんど意味がないですね。そこでコンデンサーに蓄えられるエネルギーを求めるには、思い切って極板の位置に点電荷があると考えてしまいます。さっきの式で、

$$\begin{aligned} q_1 &\to +Q \\ q_2 &\to -Q \\ \phi_1 &\to \phi_A \\ \phi_2 &\to \phi_B \end{aligned}$$

とするわけです。すると、

$$\left[\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{l}{(\text{コンデンサー})} \\ +Q & \vert\qquad\vert & -Q \\ \phi_A & \vert\qquad\vert & \phi_B \end{array}\right] \text{に蓄えられるエネルギー} = \frac{1}{2}\big(Q\phi_A + (-Q)\phi_B\big)$$

$$= \frac{1}{2}Q\,\underbrace{(\phi_A - \phi_B)}_{\text{極板間の電位差 }\Delta\phi}$$

となります。つまり、

$$\boxed{\text{コンデンサーに蓄えられるエネルギー}:U = \frac{1}{2}Q\Delta\phi}$$

ということです。

ちなみに $C = Q/\Delta\phi$ という関係式を使って、

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta\phi = \frac{1}{2}C(\Delta\phi)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

と書き換えることもできます。これらはどれも同じ量を表しているので、覚えやすい形で覚えておきましょう。

4.4　問題練習 (コンデンサーの容量・蓄えられるエネルギー)

それでは、そろそろ問題練習に入りましょう。はじめの問題は、前々回にもやった問題。ちょっと頭をほぐすために入れておきます。

問題 17 (点電荷のつくる電位と電位差)

原点に点電荷 q があるとき、

(1) 原点から r だけ離れた点につくられる電場 $\vec{E}$ を求めよ。

(2) 無限遠点の電位を 0 として、原点から r だけ離れた点の電位 ϕ を求めよ。

(3) 原点から r_1 だけ離れた点と r_2 だけ離れた点の電位差を求めよ。

* *
*
*

この問題についてはいいですよね。できれば (1) はガウスの法則から電場を出してみましょう。そして電場を積分すれば電位差が出てきます。無限遠方を基準にした電位差のことを単に「電位」と呼んだりしています。

さて、頭の体操を終えたら、いよいよコンデンサーの問題です。

*
* * *

問題 18 (平行平板コンデンサー)

平行平板コンデンサー (極板間の間隔を d, 極板の面積を S とする) に Q の電荷が蓄えられている。

(1) ひとつの極板の作る電場は、極板を無限に広い板と近似して計算できる[2]。極板間の電場の大きさを求めよ。

(2) 極板間の電位差 $\Delta\phi$ を求めよ。

(3) このコンデンサーの容量 C を求めよ。

(4) このコンデンサーが持っている静電エネルギー U を求めよ。

[2] これは極板間の距離に比べて極板の面積が大きい場合の近似です。コンデンサーならば極板間をとても狭くしているので、このような近似を考えて構わない場合がほとんどでしょう。

＊＊
＊
＊

(1) はガウスの法則で電場を出しましょう。もちろんクーロンの法則でも計算できますが、途中計算は大変です。
(2) 通常、このように無限に電荷が分布している場合、無限遠方を基準にした電位差というのを考えることはできません。無限遠方にも電荷が存在しているからです。だから、いつも計算しているように「電位」を出すことはできませんが、いまコンデンサーの話をしている限りは、極板間の電位差がわかれば十分なのです。そして極板間の電場がわかっていれば、極板間の電位差を計算することができます。
(3)(4) 極板間の電位差がわかれば、あとはもう蓄えられている電荷の総量もわかっていますから…

＊
＊ ＊ ＊

問題 19 (円筒型コンデンサー)

半径 R_1 , R_2 ($R_1 < R_2$) の無限に長い 2 つの円筒が、中心軸を同じにするように置かれている。外側の円筒を接地し、内側の円筒に電荷を与えると、これはコンデンサーになる。

内側の円筒に蓄えられている電荷の分布密度を単位面積あたり ρ であるとする。このコンデンサーの軸方向の単位長さあたりの容量と蓄えられている静電エネルギーを求めよ。

＊＊
＊
＊

極板間の電場は、円筒が無限に長いおかげでガウスの法則を使って計算できるはずです。容量を求めるには、電場を出して極板間の電位差を計算して…とやっていくわけですが、無限に長い円筒の一部分 (例えば高さ ℓ の部分) だけに注目して、単位長さあたりの容量を求めてみましょう。

＊
＊ ＊ ＊

問題 20 (球形コンデンサー)

半径 R_1 の導体球がある。その球を半径 R_2 の球殻 (導体) で、中心が同じになるように覆った。中央の球に $+Q$ の電荷を与えたとき、次の問題に答えよ。

(1) 球の中心から r だけ離れた点での電場 $\vec{E}(r)$ と電位 $\phi(r)$ を求めよ。ただし、$r = R_1, R_2$ の電場については考えなくてよい。

外側の球殻を接地[3]した。

(2) 球殻を接地する前と後で、電荷の配置はどのように変化するだろうか? 電荷の分布する様子を接地前と接地後の 2 通り図示せよ。なお、電荷がどこに分布するかよくわかるように描くこと。
(3) この球と球殻をコンデンサーとみなした場合の、コンデンサーの容量を求めよ。
(4) このコンデンサーに蓄えられる静電エネルギーを求めよ。

[3]設置した場所の電位は 0 になる。

＊＊
＊
＊

接地するというのは、その部分と地面を導線で結んで、同じ電位にするということ。地面からは必要に応じていくらでも電荷がやってくるし、電荷はいくらでも地面に逃げていくことが可能になると思ってください。

接地の前後で、電荷の分布の仕方が変化します。球殻の外側と内側の表面にどんな電荷が存在するかということに注目して、接地前後を考えてみてください。

＊
＊＊＊

4.5 電荷がたくさんあるときの静電エネルギー

コンデンサーに蓄えられるエネルギーを考えるとき、せっかく 2 つの点電荷が蓄える静電エネルギーというのを考えましたので、ついでに 2 つじゃなくて、たくさんの点電荷が存在しているとき、その電荷分布が蓄えている静電エネルギーというのも考えておきましょう。

これはまず結果の式を示しておきます。電荷の番号を $1, 2, 3, \cdots$ とすると、静電エネルギー U は、

$$U = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3 + \cdots)$$

となります。「それぞれの電荷と、その電荷が存在している位置の電位を掛け算して、すべての電荷について足し算する。最後にそれを 2 で割り算する」というわけです。

これは電荷が 2 つあるときの話を拡張していけば、こうなると想像できませんか? ひっかかる場所があるとすれば、分数の $\frac{1}{2}$ の部分でしょうか。この係数、電荷の数が n 個だったら $\frac{1}{n}$ になったりしないの??と疑問に思われるかもしれません。これについては、単純な場合で確認してみましょう。点電荷が 3 つあるときです。

(点電荷が 3 つある場合)

$$\underset{q_1}{\cdot} \qquad\qquad \underset{q_2}{\cdot} \qquad\qquad \underset{q_3}{\cdot}$$

さらに、今度はそれぞれの電荷がそれぞれの電荷の位置に、電位を作っているので、「電荷 q_1 が電荷 q_2 の位置に作る電位」を $\phi_{1\to2}$ と表記することにしましょう。$\phi_{2\to3}$ と書いたら、電荷 q_2 が電荷 q_3 の位置に作る電位です。

$$\left[\ \text{静電エネルギー}\ \right] = \left[\begin{array}{l}\text{はじめに電荷 } q_1 \text{ だけが存在していて} \\ \text{無限遠方から電荷 } q_2 \text{ を運んできて、} \\ \text{最後に電荷 } q_3 \text{ を無限遠方から持って} \\ \text{くるときの仕事}\end{array}\right]$$

と考えたとします。この考えは間違いありません。このような考えで計算すると、

$$U = q_2\phi_{1\to2} + q_3(\phi_{1\to3} + \phi_{2\to3})$$

となりますね。無限遠方から q_2 を持ってくるのに必要な仕事が $q_2\phi_2$ で、q_3 を持ってくるときは電荷 q_1 だけでなく電荷 q_2 がつくる電位もあるってことに注意しましょう。

ここでまた考え方を逆にしてみます。電荷を持ってくる順番を逆にして、

$$\left[\ \text{静電エネルギー}\ \right] = \left[\begin{array}{l}\text{はじめに電荷 } q_3 \text{ だけが存在していて}\\ \text{無限遠方から電荷 } q_2 \text{ を運んできて、}\\ \text{最後に電荷 } q_1 \text{ を無限遠方から持って}\\ \text{くるときの仕事}\end{array}\right]$$

と考えて、静電エネルギーを計算してみましょう。すると、

$$U = q_2\phi_{3\to2} + q_1(\phi_{2\to1} + \phi_{3\to1})$$

という形になりますね。

さっきの式と両辺足し算してみましょう。

$$\begin{aligned}2U &= q_2\phi_{1\to2} + q_3(\phi_{1\to3} + \phi_{2\to3})\\ &\quad + q_2\phi_{3\to2} + q_1(\phi_{2\to1} + \phi_{3\to1})\\ &= q_1(\phi_{2\to1} + \phi_{3\to1}) + q_2(\phi_{1\to2} + \phi_{3\to2}) + q_3(\phi_{1\to3} + \phi_{2\to3})\end{aligned}$$

となりますね。

ここで $\phi_{2\to1} + \phi_{3\to1}$ というのは、電荷 q_2 と電荷 q_3 が電荷 q_1 の位置につくる電位を足し算したものです。つまりこれが電荷 q_1 が存在している位置の電位というわけで、改めてこれを ϕ_1 と書きましょう。$\phi_1 \equiv \phi_{2\to1} + \phi_{3\to1}$ です。同様に電荷 q_2 の位置の電位と電荷 q_3 の位置の電位も考えて、

$$2U = q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3$$

となります。よって、

$$U = \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3)$$

ですね。

このように考えてみると、これが 3 個でなくて、もっとたくさんあった場合も同じように考えられますよね。1 番目の電荷が存在していたと考えて番号順に無限遠方から持ってくる…と考えた場合と、逆の順序で持ってくる場合。それぞれの考え方で静電エネルギーを計算して、足し算をすると…という流れです。

i 番目の電荷に対して $q_i\phi_i$ という量を考えて、すべての電荷に対して足し算していくというのは、「1 番目の電荷が先にあって 2 番目の電荷を持ってきた…と考えるエネルギー」と「2 番目の電荷が先にあって 1 番目の電荷を持ってきた…と考えるエネルギー」という同じ量を 2 重に足し算しているというわけです。だから、静電エネルギーを計算したいときは、2 で割ればいい。そんなことで、係数は $\frac{1}{2}$ になるのです。

まとめておきます。

電荷が複数あるとき、その電荷分布に蓄えられている静電エネルギー:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3 + \cdots) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i \end{aligned}$$

2行目は、ちょっと格好良く書こうと思って、$\sum$ 記号を使ってみました。

ちなみに電荷がこのようにバラバラに配置しているのでなく、連続的に分布しているときも同じように考えることができます。そのときは足し算する代わりに積分をするだけです。それぞれの位置での電荷密度を ρ と書けば、微小体積 dv の中にある電荷は ρdv なので、その位置の電位 ϕ を掛け算して、積分 (足し算) します。

電荷が連続的に分布しているときの静電エネルギー:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\phi(r)dv$$

という計算です。

4.6 *問題練習 (静電エネルギー)

1問だけですが、問題練習をどうぞ。

問題 21 (球の内部に分布した電荷)

半径 a の球の内部に一様に電荷が分布している (表面だけではないことに注意!)。分布している電荷の総量が $+Q$ であるとき、蓄えられている静電エネルギーを以下の手順で計算せよ。

(1) 球の中心からの距離を r として、電場 $\vec{E}(r)$ を r の関数として表せ。

(2) 球の中心からの距離を r として、電位 $\phi(r)$ を r の関数として表せ。

(3) 電荷が連続的に分布する場合の静電エネルギー U は、

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho\phi(r)dv$$

で求められる。ただし、ここで V と書いてあるのは電荷が分布している領域を表し、ρ は電荷の分布密度を表している。この式を用いて、この球に蓄えられている静電エネルギーを計算せよ。

(4) 点電荷とは、一様に電荷が分布した半径0の球だと考えることができる。点電荷の静電エネルギーはどうなっているか、またそれは何か問題になっているだろうか、考察せよ。

* *
*
*

指示に従って (3) まで計算できれば、十分合格点だと思います。(計算はちょっと大変です)
多重積分ができるかどうかが問題かな。普通は x, y, z という座標で積分することが多いですね。そのときは $dv = dxdydz$ です。だけど、この問題では、3次元極座標 (r, θ, φ) というのを用いると、計算が少しやりやすくなります。
ちなみに、そのときの微小体積 dv は、$dv = (dr)(rd\theta)(rsin\theta d\varphi)$ になります。
(4) については、模範解答を敢えて示しませんので、いろいろ考えてみてください。直前の (3) で出した静電エネルギーの式で r を 0 に近づけていくと、静電エネルギーは無限大になってしまいます。これは点電荷が蓄えている静電エネルギーが無限大ということですね。だけど、普段、点電荷が 2 つあるときの静電エネルギーは有限の値に収まっています。もしも無限大のエネルギーが出てくるならば、点電荷の考え方を使って静電エネルギーの計算をすること自体、奇妙なことになります。この辺りの矛盾 (?) について、どう思うか考えてみてください。

ヒントだけ出しておくと…静電エネルギーはその電荷配置を作るのに必要な仕事でした。

*
* * *

第5章　磁束密度(アンペールの法則)

ここまでは電場や電荷など「電気の力」に関する話をしてきました。そこで今回は電磁気学のもう一つの対象である「磁石の力」について考えていきましょう。

5.1　磁石の力を生むもの

磁石の力 ——「磁力」については、基本的には電気の力と同じように考えます。つまり、まず磁石の力を働かせる能力がどれだけあるかを示す量として「磁荷」という量を考えます。そして空間の中に磁荷が存在していると、その周りには「磁場」というものが発生していると考えます。そして磁荷に働く力というのは、その磁荷が存在している位置の磁場に磁荷の大きさを掛けたものとして求めます。

このように話すと、磁石の力についてはもう学ぶことはないんじゃないかと思うかも知れませんが、電気の力とは大きく違う点もあります。それはなにかというと「単位磁荷は存在しない」ということです。わかりやすい言い方をすると「磁石は必ずN極とS極が対になって存在している」ということです。

なぜこのような性質があるかというと、ついさっき「磁荷が磁場を発生させる」と説明しましたが、このことが正しくないのです。正しくは「この世の中に磁荷というものは存在せず、電荷が空間中を移動したときに磁場が発生する」のです[1]。

電荷が空間中を動くというのは、そこに「電流が流れた」と表現できます。つまり電流が流れるとその周囲に磁場が発生するよ…というのが、上に書いた内容なのです。

それじゃあ磁石とはいったい何なのか?と思うかもしれません。実は磁石というのは単位磁荷の集まりではありません。単位磁荷(N極かS極だけで存在しているもの)だとしたら、磁石を半分に割ったときに「N極だけ」の塊と「S極だけ」の塊を作ることができるはずです。だけど実際は磁石を細かく千切っていっても必ずN極とS極の対が現れますね。

どうしてこうなるか考えてみましょう。磁石を限界まで千切ったとします。すると原子が出てくるはずです。その原子の中には電子があり、原子の中をぐるぐる回っています。

[1]最近の物理学のなかでは、単位磁荷の存在を認める考え方もあります。モノポールという言葉をどこかで目にしたことがあるかも知れません。それが単位磁荷のことです。しかし最近の物理学で議論されているような単位磁荷があったとしても、以下で議論する内容に変化はありません。その場合も見かけ上の単位磁荷はやはり0であると考えるからです。

なによりそのような単位磁荷を考えなければならないのはごく特殊な場合だけですし、それを考えなくても古典電磁気学は十分に意義深いものです。そこでこの講義では単位磁荷は存在しないものとして説明を進めます。

電子がぐるぐる回っている…ということは、電流が流れていると見なすことができます。そしてその周囲に磁場を発生させることになります。電流が発生させる磁場というのは単位磁荷がつくる磁場とは違い、N 極と S 極が対になったような磁場です。そのため、磁石はどこまで分解しても N 極と S 極が対になって現れるのです。これが磁石の正体なのです[2]。

そのような細かい電流でなく、目に見えるくらいの範囲を電荷が動いた (=電流が流れた) としても、その周囲に磁場が発生します。そして発生した磁場は、磁石や電流に作用して、力を働かせるというわけです。

さてこのことを踏まえて、どれくらいの電流が流れたらどれくらいの磁場が発生するのかということを考えていきましょう。

5.2 電流があるときの磁場の求め方 1 (アンペールの法則)

電気についての議論を思い出してみましょう。電気の力では、空間中に電荷があるとその周囲に電場を発生させました。どれくらいの電荷があるとどれくらいの電場が発生するか、という関係を「ガウスの法則」が示していました。今度は磁石の力について、「ガウスの法則」に対応する法則を考えていきましょう。

空間中にある電流と、その周囲にできる磁場との関係を示す法則のことを「アンペールの法則」と呼びます。その内容は、いきなり式で書いてしまうことにしましょう。こうです。

アンペールの法則：磁場と電流の間に成り立つ関係式

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{i}$$

いきなり記号が現れていますが、

$$\begin{cases} \vec{B} & : \text{磁場} \\ \vec{i} & : \text{電流密度} \end{cases}$$

というものです。$\vec{B}$ のこと、教科書によっては「磁束密度」と呼んでいます。歴史的には確かに「磁束密度」と名付けられたんですが、実際の役目は「磁場」と呼ぶべきものだと思いますので、ここでは「磁場」と書いておきます。$\vec{i}$ は単位面積あたりどれだけの電流が流れているか、その量と方向を示すものです。μ_0 は真空の透磁率…適当な定数だと思って結構です。

さて、このように書いてみたものの、どうも $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{i}$ というのは意味がわかりにくいですよね。電気の回にお話ししたガウスの法則のように、このアンペールの法則にも「積分形」と呼ばれる形があります。そちらに式を変形してしまいましょう。

[2] 磁石の正体については、これ以外にも説があります。…というかここの説明は大雑把すぎです。興味がある人はぜひ磁石について研究している人を見つけて、聞いてみてください。

$$\underline{\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{i}}$$

$$\Downarrow \quad \text{(積分形で書くと)}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_A \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

となって、この最後の式が「積分形のアンペールの法則」と呼ばれるものです。この式変形の過程では“ストークスの定理”という数学のテクニックを使って変形します。今日はやりませんが、それほど難しい話ではありません。変形の途中に興味を持った人は、教科書で勉強してみてください。

今日の演習では、この積分形のアンペールの法則をどう使って問題を解くかってことを説明します。さて、上ではいきなり記号を導入していますが、A とか C というのは

$$\left(\begin{array}{ccl} A & : & \text{任意の領域 (面)} \\ C & : & \text{領域 } A \text{ の周囲} \end{array} \right)$$

です。

この積分形のアンペールの法則を、ガウスの法則のときと同じく日本語訳してしまいましょう。この法則は、磁場と電流の間に成り立つ関係を示しているのですが、

アンペールの法則の意味 (日本語訳?):

$$\left(\begin{array}{l} \vec{B} \text{ をある閉じた線上} \\ \text{1 周だけ線積分をする} \end{array} \right) = \mu_0 \left(\begin{array}{l} \text{その線で囲まれた面を横切る} \\ \text{電流をすべて足したもの} \end{array} \right)$$

という関係になっています。(μ_0 はこの両辺がイコールになるための辻褄合わせの数だと考えても構いません) 磁場と電流の間には、常にどんなときでも、この関係式が成り立っています。そして、

$\rightarrow$ この関係式から、(特定の場合に) 磁場を楽に計算できる。

というわけです。

この積分形のアンペールの法則でどんなときでも磁場を求めることができるかというと、そういうわけではありません。ガウスの法則は特定の場合に限って簡単に計算ができた…というのと同じく、アンペールの法則は特定の場合に限って、簡単に磁場を計算することができます。(特定の場合でなく、磁場を求めたいときは、ビオ・サバールの法則を使います。それについては後の授業で触れることにします)

さて、それではどんな場合に使えるのか…ってことも考えながら、この積分形のアンペールの法則の使い方を見ていきましょう。この使い方、ガウスの法則のときとほとんど同じです。

アンペールの法則の両辺を眺めてみると、左辺は閉じた曲線上で線積分をしなければなりません。右辺は、面を横切る電流を足し算するだけです。どちらも同じくらい厄介になりそうですが…どちらかというと、線積分の方が大変になりやすそうです。そこでポイントは——

> 使い方 : 線積分しやすい曲線を見つける

ということになります。

どんな曲線だと線積分しやすいかというと、磁場の大きさ $|\vec{B}|$ が等しくなるような線上です。そうでなければ、積分するそれぞれの位置によって $\vec{B}$ の大きさや方向を意識して足し算しないといけません。だけど始めから磁場の大きさが等しくなるような線で積分することにしておけば $|\vec{B}|$ を積分の外に出すことができますね。

そのためにはまず

> 使い方 : 線積分しやすい曲線を見つける
> 1. 磁場のおよその形を予想する。

ということが必要ですね。その予想ができたら、

> 使い方 : 線積分しやすい曲線を見つける
> 1. 磁場のおよその形を予想する。
> 2. 磁場の大きさが同じであるような曲線で1周させる。そのとき電流が存在する領域が線で囲まれるようにする。その囲まれた部分が領域 A。
> 3. アンペールの法則を適用して、$|\vec{B}|$ を求める。
>   ($\vec{B}$ の方向については予想する)

という流れになります。

さて「磁場のおよその形なんかわからないよ」という場合はどうしましょうか? …この答えはガウスの法則のときと同じです。「そのような場合は、アンペールの法則で楽に計算はできません。今度、お話しするビオ・サバールの法則を使って磁場を求めてください」

それでは、話を聞いているだけではよくわからないでしょうから、具体的に問題を解いていってみましょう。

5.3 *問題練習

問題 22 (Ampèreの法則 / z 軸の導線がつくる磁場)
原点を通り、z 軸方向に無限に長い導線がある。その導線に大きさ I の電流を流した。(導線の厚みは無視してよい)

(1) その電流の向きを z 軸正の方向として、導線の回りにできる磁場の様子を図示せよ。
(2) (1) の考察のもと、アンペールの法則を用いて、導線の回りにできる磁場 (磁束密度)$\vec{B}$ を、z 軸からの距離 r を変数にとって表せ。

* *
*
*

直線電流がどんな形の磁場をつくるのか１度も聞いたことがない人は、形を予想しろったってさっぱりわからないよ!と思っていそうですね。直線電流があると、その電流を中心軸とする円上に磁場が発生します。
なぜそうなるのかというと…これは実験して調べてみたらそうなっていたという実験事実なんです。

電流の向きをネジが進む方向として、右ネジを回す方向が磁場の向きと一致します。

*
* * *

問題 23 (Ampèreの法則 / 無限に長いコイルがつくる磁場)
単位長さあたりの巻き数が n 回であるコイルに電流 I を流した。このコイルは無限に長いと見なせるとして、コイル内の磁場 (磁束密度) の強さ $|\vec{B}|$ を求めよ。

* *
*
*

アンペールの法則を使って磁場を求める典型的なパターンの一つですが、初めてこの問題に挑戦する人は、どんな曲線で電流を囲めばいいのかわかりにくいと思います。

磁場の線積分が計算しやすい線を選べばいいわけです。なので磁場の大きさが一定になる線だけでなく、線と磁場の向きが直交しているような線分も、積分領域に加えてしまいましょう。線と磁場の向きが直交しているということは、線積分 $\int \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ において、$\vec{B}$ と $d\vec{\ell}$ が直交しているということ。内積が 0 になります。…0 を積分しても、0 のままだから、積分しやすいですね。

*
* * *

問題 24 (Ampèreの法則 / 厚みのある導線のつくる磁場)
半径 R の円柱状の導線がある。この導線に大きさ I の電流を流す。
この導線は無限に長いものとして、さらに導線内では電流は一様に流れるものとする。

(1) 導線内の電流密度 i(単位断面積あたりを流れる電流の大きさのこと) を求めよ。
(2) 円柱の中心からの距離を r として、この電流によって生じる磁場 (磁束密度) の大きさ $|\vec{B}|$ を r の関数として表せ。
(3) 横軸に r をとって、$|\vec{B}|$ のグラフを描け。

＊＊
＊　計算ができたら、導線の外側での磁場の関数形を見てみましょう。これって、
＊　導線の厚みを無視して磁場を求めたときの形と同じになっていますね。
＊
＊＊＊

5.4 *問題練習 2

アンペールの法則で楽ができるパターンは、だいたいこんなものですが、ついでにもうちょっと煩雑な問題もやってみましょうか。

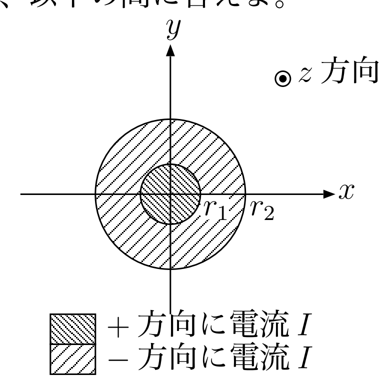
問題 **25** (同軸ケーブル)

同軸ケーブルの周囲にできる磁場について考えてみよう。

導線は無限に長い円柱状になっていて、半径 $0 \sim r_1$ の間には電流が + 方向に流れ、半径 $r_1 \sim r_2$ の間には電流が − 方向に流れているとする。なお、電流の + 方向を z 軸正の方向とし、導線の中心軸の位置は $(x, y) = (0, 0)$ とする。導線を流れる電流の大きさは I とし、さらに導線内は一様に電流が流れるものとして、以下の問に答えよ。

(1) x-y 平面における磁場の大きさ $|\vec{B}|$ を原点からの距離 r を変数にして表せ。$(r = \sqrt{x^2 + y^2})$

(2) (1) で求めた結果を横軸に r、縦軸に $|\vec{B}|$ をとってグラフに描け。



問題 **26** (磁場と電流の関係式)

半径 R の円柱状の導線がある。その導線に電流を流し、内部に発生した磁場を測ったところ、

$$|\vec{B}(r)| = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{3}{2}r - \frac{r^2}{R}\right)$$

となっていた。ここで r は導線の中心からの距離で、磁場の方向は導線と中心を同じくする半径 r の円の接線方向であるとする。

(1) この導線に流れている電流の大きさを求めよ。

(2) 導線はまっすぐで無限に長いものとして、導線の外側 $(r > R)$ での磁場 (磁束密度)$\vec{B}(r)$ を求めよ。

(3) 横軸に r をとって、$|\vec{B}(r)|$ のグラフを描け。

問題 **27** (磁場と電流の関係式)

半径 R の円柱状の導線がある。その内部の電流密度 $i(r)$ は導線の中心軸からの距離を r として、

$$i(r) = i_0 \left(A - 4\frac{r^2}{R^2} \right)$$

であった。
この導線は無限に長く、かつまっすぐであるとして、以下の問題に答えよ。

(1) 導線の中心からの距離を r として、発生する磁束密度の大きさ $|\vec{B}(r)|$ を求めよ。
(2) この導線の外側 $(r > R)$ に磁場が発生しないときの A の値を求めよ。
(3) A が (2) で求めた値のときの電流密度 $i(r)$ と磁束密度の大きさ $|\vec{B}(r)|$ のグラフを、横軸に r をとって表せ。
(4) この導線の外側 $(r > R)$ に磁場が発生しないとき、電流密度が 0 の点より内側と外側の部分の導線に流れる電流はどうなっているか説明せよ。

第6章　ビオ・サバールの法則とファラデーの法則

今日はビオ・サバールの法則について説明したいと思います。

前回アンペールの法則というのをやりましたが、皆さん覚えていますか? アンペールの法則が何だったかというと、磁場――磁石の力――と電流の関係を教えてくれる法則でした。電流が流れるとその周りには磁場が発生します。そしてどれくらいの電流が流れるとどれくらいの磁場が発生するのか書き表したのがアンペールの法則でした。その電流と磁場の間の関係式を利用して、ある電流が流れているときにその周りにできる磁場を計算したりしましたね。

だけどアンペールの法則でどんなときでも磁場を計算できるかというと、そんなことはありません。いや、アンペールの法則はどんなときにも成り立っている基本的な方程式なので、数学が得意な人ならばアンペールの法則を使ってどんなときでも磁場を計算できるとも言えます。でも大抵の人にとっては、それは難しい。アンペールの法則では電流が特定の流れ方をしているときには楽に磁場を求めることができるけど、もっと複雑な流れ方をしているときにはアンペールの法則はちょっと使いにくくなります。

それじゃあアンペールの法則で磁場が求められないときはどうしたらいいのかというと、そんなときはビオ・サバールの法則を使えばいいのです。ビオ・サバールの法則は、アンペールの法則と同じく「磁場と電流の関係を示す関係式」です。そして、電流がどんな流れ方をしていても、その周りにできる磁場を計算することができる、とてもパワフルな式なんです。

こんなこと言っていると、それじゃあアンペールの法則には意味がないんじゃないかと疑問に思うかもしれませんね。そういうわけではありません。なぜなら、ビオ・サバールの法則とアンペールの法則はどちらも同じものだからです。アンペールの法則を変形していくことで、ビオ・サバールの法則の形にすることが可能です。アンペールの法則も微分形があって、そこから使いやすい積分形に式変形しましたね。同じように、微分系のアンペールの法則を使いやすい形に書き直したのが、ビオ・サバールの法則です。そういう意味でアンペールの法則の方が、より根本にある式として重要視されているのです。歴史的には、ビオ・サバールの法則が先に発見されています。電流と磁場の間にはこんな関係があるんじゃないか?とビオさんとサバールさんが発見したのです。だけどその関係式をいろいろと数学的に書き直してみると、他にも応用しやすいアンペールの法則の形になったのです。

6.1 電流があるときの磁場の求め方2 (ビオ·サバールの法則)

さて、それじゃあビオ・サバールの法則とはどんなものかを説明していきましょう。まずビオ・サバールの法則というのは、

> ビオ・サバールの法則
> $\longrightarrow$ 電流がつくる磁場を必ず計算する方法。

です。その基本となる考え方はこうです。複雑な形をした導線があるとしましょう。複雑でなくとも、こんな風に曲がっていればそれだけでアンペールの法則は使いにくくなりますね。そしてこの導線には、電流が流れているとしましょう。導線から少し離れた位置にできる磁場を計算してみたいとします。さて、いきなり導線全体がこの位置につくる磁場を計算しようにも、複雑すぎてうまくいきません。それじゃあ、どうするか——こうします。導線をすごく細かく、切ってしまいます。そしてとても短い導線の集まりだとして考えてしまいます。導線に電流が流れていました。それはこの短い導線それぞれに電流が流れていたということです。そしてこの短い導線一つに注目しましょう。短い導線一つが、考えている点につくる磁場を求めましょう。そして、導線全体がつくる磁場というのは、その細かい導線それぞれがつくる磁場をすべて足し算したものであると考えるのです。

> ビオ・サバールの法則
> $\longrightarrow$ 電流がつくる磁場を必ず計算する方法。
> (考え方)
> 「電流の微小部分がつくる磁場を考えて、電流が流れている全区間の分を足し上げる。」

このように電流が流れている部分を細かく分けて、それぞれの電流がつくる磁場を足し算しようというのが、ビオ・サバールの法則の基本となる哲学です。

それじゃあ、微小な部分を流れる電流がつくる磁場を求めることはできるのか? というと、これは可能なのです。このような式で求めることができます。

> 電流が大きさ i で $d\vec{s}$ という方向に流れている場合、電流の位置から $\vec{r}$ だけ離れた位置にできる磁場 $d\vec{B}$ は、
>
> $$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$
>
> となる。

$\mu_0/4\pi$ というのは、実験と矛盾がないようにうまく定めた比例定数です。この式はなぜこうなるの?と聞かれても困ってしまう式です。なぜならば、この式は「実験してみたらこうなっていた」という式だからです。そして実際に実験して、このような式が成り立っていると指摘したのが、ビオさんとサバールさんなんです。

とにかく、このように微小な電流がつくる磁場がわかりました。あとはこれを足し算(積分)すれば、電流がつくる磁場を計算することができますね。どんな複雑な形の電流でも、細かく分けてから足し算する——という操作で、磁場を計算できます。ただ式の形を見てもらうとわかる通り、この計算をするのはかなり大変な計算になることが多いです。

電流があって、そこから磁場を計算したいというとき、アンペールの法則なら計算は楽ちんです。だけど、特定の電流にしか使えません。ビオ・サバールの法則ならどんな電流でも原理的には計算できます。だけど、計算はかなりやっかいになることが多いです。

それでは、まとめておきましょう。

ビオ・サバールの法則

$\longrightarrow$ 電流がつくる磁場を必ず計算する方法。

(考え方)

「電流の微小部分がつくる磁場を考えて、電流が流れている全区間の分を足し上げる。」

電流が大きさ i で $d\vec{s}$ という方向に流れている場合、電流の位置から $\vec{r}$ だけ離れた位置にできる磁場 $d\vec{B}$ は、

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

となる。

$\vec{B}$ を求めるには、これを全ての電流の区間について積分する。

最後にひとつ注意を述べておきますが、このビオ・サバールの法則という関係式は、磁場の大きさだけでなく方向も教えてくれる関係式になっています。左辺も右辺もベクトルになっていますね。なので、最後の足し算(積分)をするときは、ベクトルの方向も意識して積分しないといけません。そのことがビオ・サバールの法則を使った計算を難しくしているところですが、まあ注意してやるようにしてください。

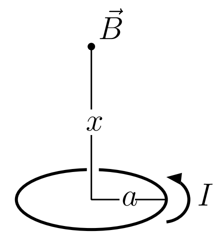
6.2 *問題練習

それでは実際に問題を解いてみましょう。

問題 28 (Biot-Savert の法則 / 円状電流が作る磁場)

半径 a の円状に大きさ I の電流が流れている。

この円の中心から垂直に x だけ離れた点に作られる磁場(磁束密度)の大きさ $|\vec{B}|$ を求めよ。



* *
* 　ビオ・サバールの法則は大きさだけでなく方向も決めている式だということに
* 　注意してください。つまり方向を意識して、うまく足し算してください。

*
* * *

問題 29 (コイルのつくる磁場)

真空中に半径 r、単位長さあたりの巻き数 n のコイルがある。そのコイルに大きさ I の電流を流したとする。

(1) このコイルを無限に長いコイルであると考えた場合の、コイル内に生じる磁場の強さ $|\vec{B}|$ を、アンペールの法則を用いて求めよ。
(2) このコイルの長さを ℓ とする。コイルの中心軸上、端から a だけ離れた点に生じる磁場の強さ $|\vec{B}|$ を求めよ。ただしコイルの巻数は十分に大きく、導線の本数は各点で連続的に変化すると見なしてよいことにする。
(3) (1) の結果と (2) の結果を比較すると、どちらのほうが大きいか。また、なぜそのような結果になるのかを考察せよ。

* *
* 　コイルも導線でできているのですから、それを細かく分けてそれぞれがつくる
* 　磁場を全て足す——というのがちゃんとした求め方です。

だけど今の場合、直前の問題 (円状電流がつくる磁場) の答えを利用してしまいましょう。

*
* * *

6.3　電場と磁場の間の関係 (ファラデーの法則)

それではもう一つの話題についても説明したいと思います。それは「電場と磁場の関係を示す法則——ファラデーの法則」です。

電磁気学というのは、電気の力や磁石の力について考える学問です。そして電気の力や磁石の力を知るためには、電場や磁場を調べればいいということで、電磁気学では電場や磁場についていろいろと勉強します。

そして私たちはすでに電場を求める方法を知っています。ガウスの法則とクーロンの法則です。そして磁場を計算する方法も知っています。アンペールの法則とビオ・サバールの法則です。つまり、電場だけ磁場だけを考えている場合に対しては、もう全て学んだと

いえます。もちろん、細かい議論や問題練習は必要でしょうが、問題を解くための道具はすでに揃っています。

電場について、磁場についての勉強が終わったら、じゃあどうするかというと、今度は電場と磁場の間にどんな関係があるかを考えてみましょう。

実は電場と磁場というのは、お互い無関係なもののように思えますが、実際にはお互いに影響を与えあうような仲なんです。電場が時間とともに変化したとします。するとそれは電流が流れているのと同じ効果を示し、その周囲に磁場が発生します。また磁場が時間とともに変化すると、今度はその周りに電場が発生することになります。

これから勉強するファラデーの法則というのは、磁場が時間とともに変化したときにどんな電場が発生するのかを示す法則であるといえます。

さて話の出発地点はこれです。

電荷の大きさ q の粒子が磁場 $\vec{B}$ の中を速度 $\vec{v}$ で動いていると、その粒子は

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

の力を受ける。(これをローレンツ力という)

これも実験で調べてみたらこうだったというわけです。——電荷を持っている粒子が磁場中を動くと、磁場の影響で力を受ける。ちょっと聞くと「そんなもんかなぁ」かもしれませんが、これはなかなか不思議な関係式なんですね。だって、電荷というのは「電気の力をどれくらい受けやすいか、与えやすいか」を示す数値です。磁場というのは「磁石の力をどれだけ与えるか」という数値です。電荷にとって磁場というのはまるで関係がなさそうな量です。実際、電荷が止まっているときには、なんの関係もありません。だけどひとたび電荷が動き出すと、磁場は電荷に影響を及ぼすことになるのです。

磁場中を電荷が動くと電荷に力がかかります。電荷に力がかかるということは、それはあたかも「そこに電場があるかのよう」に見えます。実際には全く違ったメカニズムかもしれない。だけど、電荷に力が加わるという点では共通です。そして、私たちにわかるのは電荷に力が加わっているということだけ。その根本がなんであれ、見分けることなどできません。そこで、「磁場中を電荷が動くと電場が発生する」と言えるわけです。

これをもっと別の言い方をしてしまいます。磁場中を電荷が動くと電場が発生します。だけどこれを、電荷を中心に据えた言い方をしてみましょう。電荷が動いているんじゃなくて、磁場の方が動いていると考えてしまいます。もしくは磁場が時間とともに変化しているんだと考えましょう。そしてそんなときには「電場が発生する」というわけです。

とにかく、これが基本となる考え方です。これを踏まえて、コイル (閉じた導線の回路) が磁場中を移動しているような状況を考えてみましょう。コイルは導線です。導線の中には電子がたくさん詰まっています。コイルが磁場中を移動すると言うことは、コイルの中にある電子も磁場中を移動することになります。その結果、先で述べたローレンツ力を

受け、電子はコイルの中を動き出します。電子が動く、つまりコイルに電流が流れるわけです。

さてコイルに電流が流れる——普通、電池のような装置でコイルに電圧 (起電力) を与えないと、電流は流れないですよね。だけど、コイルを磁場中移動させると、あたかも電圧 (起電力) がかかっているかのように、電流が流れることになります。

つまりコイルを磁場中移動させると、電圧がかかっているかに見えるということで、どのように移動させたらどれくらい電圧 (電場をコイルを1周り積分したもの) がかかるかを示した式がファラデーの法則なのです。その関係式というのは、こんな感じ。

磁場 $\vec{B}$ 中をコイルが移動する際に発生する電圧 (起電力・電場をコイル1周積分したもの)V は

$$V = -\frac{d}{dt}\Phi ,$$

となる。ただし、Φ というのは $\Phi = \int_{コイル} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ という面積積分で与えられる量。

これが「ファラデーの法則」です。

さて、ここまでの説明では、磁場中をコイルが動いたら…としていましたが、そうではなくて、コイルは動いていないとします。そしてそのコイルの周りの磁場の大きさが変化したとします。するとどうなるか。それは、コイル周りの磁場が変化しているわけですが、その状況はコイルにとってはコイルが磁場中を動いているのと同じような効果があるでしょう。

つまり、上に書いたファラデーの法則というのは、コイルが磁場中を移動している場合に限らず、コイルの周りの磁場が時間とともに変化したときに生じる起電力をも表している式だと言えます。

磁場が時間とともに変化したときもコイルを貫く磁場を全て足し上げたもの (面積分したもの) が時間とともにどう変化するかに応じて、電流を流す力——電圧 (起電力) が発生するのです。

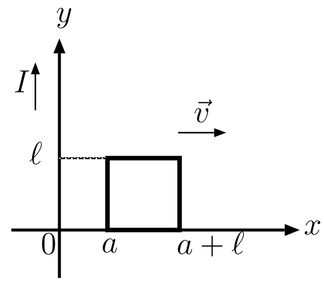
6.4 *問題練習

問題 30 (誘導起電力 (**Farady** の法則))

y 軸上を正方向に電流 I が流れている。x-y 平面上、一辺 ℓ の正方形の導線 (コイル) が $(a,0)$,$(a+\ell,0)$,$(a+\ell,\ell)$,(a,ℓ) を頂点にして置かれている。

(1) $(a, 0)$ の位置における磁束密度 $\vec{B}$ を求めよ。

(2) 正方形のコイルが x 軸正の方向に速さ v で動き始めた。そのときコイルに生じる誘電起電力を求めよ。



* *
*
*

$\Phi = \int_{\text{コイル}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ の時間変化をいきなり計算しようとしても大変です。そこである時刻のコイルの位置と、その時刻から Δt 時間が経ったあとのコイルの位置を図に書いて、コイルを貫く磁場がどれくらい変化するか $\Delta\Phi$ というのを考えてみてください。

$\Delta\Phi/\Delta t$ で $\Delta t \to 0$ としたものが $d\Phi/dt$、つまりコイルに発生する起電力ということです。

*
* * *

第7章　理論的な概観の整理

さて6回にわたって電磁気学のお話をしてきました。今日は最後のおまけの授業日[1]なので、特に新しいことには触れず電磁気学の概観をちょっと整理しておきましょう。

この授業は「演習」の授業なので、とにかく「問題を解く」ことに主眼を置いて説明してきました。そんなだったので、ガウスの法則に対しては「特定の場合に電場を楽に求められる」とか、アンペールの法則に対しては「特定の場合に磁場を楽に計算できる」とか身も蓋もない言い方をしてきました。けどこれって、とても偏った見方です。問題を解けるようになればやる気も出るし、理解が進むとも思います。だけどこういう“問題を解く”ことのみに集中しているのは、本来の“学問を楽しむ”というスタンスからはあまり感心できないことのような気がします。そんなことが実は話しながらも気にかかっていまして、せっかく余分な時間ができたので、理論的な概観と称して少し古典電磁気学の全体像についてお話させてください。ちょっと私の懺悔にお付き合いいただくってことになります[2]。

7.1　古典電磁気学

さて電磁気学が目的としていることは、初回にも話をしたように「電場と磁場が時間と共にどういう変化をするか」を知ることです。そして、実験して確認したりしながら、次の4つの式が電場 $\vec{E}$、磁場 $\vec{B}$(および電荷密度 ρ、電流密度 $\vec{i}$) の間で、常に成り立っていると考えられるようになりました。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho \\
\mathrm{div}\vec{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\mathrm{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{i} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

[1]同時に2クラスの演習を担当して、各クラスは隔週で演習を受講していました。ところが授業日程の関係か、1クラスだけ7回授業日があり、他方には6回だけの授業。同じ学科で進度を合わせるという目的もあり、この7回目の授業日はおまけとして、基本的に雑談で済ませることにしたのでした。

[2]実はこの回は出席を取らず、希望者だけ来るように指示していたため、お付き合いしてくれたのはほんの数名でした。

これら 4 つの式を定式化した人の名前にちなんで Maxwell 方程式と呼んでいます。(なおここで書いた式は全て真空中として書きました)

電磁気学では、この 4 つの式を出発地点にします。この 4 式は常に成り立っていると考えて、あとは考えたい状況に合わせて式を変形します。ちなみにこの式が本当に常に成り立っているの?と疑うかもしれませんね。その姿勢は大切です。もしもこの 4 式が成り立っていると考えて理論的に出した結果が実験事実と矛盾したら“この 4 式が常に成り立っている”という前提が間違っていたということになります。だけど、そのような実験は見つかっていません。なので今まで実験で確かめられている範囲に限れば、この 4 式は常に成り立っていると考えてよいでしょう。

さて、これら 4 つの基本方程式をそれぞれ軽く眺めていきましょう。

まず 1 つ目。

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

という式です。これは先に「微分形のガウスの法則」として紹介しましたね。

ガウスの法則を説明した際には「微分形は使いにくい。これを積分形で書く」と話して、積分形の使い方を説明しました。この説明だけだと「じゃあ積分形だけ知っていればいいんじゃない?」と思うかもしれません。

なぜ使いにくい微分形などを考えないといけないのか? それは、微分形のガウスの法則の方が、応用範囲が広いからです。微分形のガウスの法則を特定の条件の下で書き直せば、授業中に「クーロンの法則」という呼び名で紹介した

$$\vec{E}(r_0) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{(r-r_0)^2}\vec{e}dv$$

という式に変形することができます。微分形のガウスの法則からは、数学的な式変形をすることで「積分形のガウスの法則」に変形することもできれば、なじみ深い「クーロンの法則」の形に書き換えることもできるのです。もちろん積分形のガウスの法則と微分形のガウスの法則は、全く同等のものですから、積分形のガウスの法則からクーロンの法則を出すこともできるのですが、それは途中で一度は微分形を経由して…ってことになると思います。

そんなわけで微分形のガウスの法則の方をより基本的だと見なして、電磁気学の基本方程式 Maxwell 方程式の一つに数えるわけです。

またこのガウスの法則は、電場と電荷の間に常に成り立つ関係式ですが、そもそも電場とはどういうものか、電荷とはどういうものかを定めている式であると見なすことも可能です。

まとめておくと、

<table>
<tr><td rowspan="3">$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$
(微分形のガウスの法則)
このままでは使いづらい</td><td>(数学で変形)</td><td>[応用する上で…]</td></tr>
<tr><td>$\leftrightarrow \displaystyle\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dv$
(積分形のガウスの法則)</td><td>特定の状況において
電場を楽に計算できる</td></tr>
<tr><td>$\leftrightarrow \vec{E}(r_0) = \displaystyle\int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{(r-r_0)^2}\vec{e}dv$
(クーロンの法則)</td><td>どんな場合でも電場を
計算可能。大変だけど</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Uparrow$
電場と電荷について定めている式</td></tr>
</table>

ということです。積分形のガウスの法則は任意の立体Vに対して成立します。また、上でクーロンの法則と書いたものの積分範囲は、電荷が存在している場所すべてでの積分です。

それでは次の式に移りましょう。次の基本方程式は、

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

というものです。

これは「磁場に対するガウスの法則」などと呼ばれたりします。これまでの授業時間では特に触れませんでした。なぜ触れなかったかというと「問題を解く上で特に役に立たないから」です。

この式は「この世の中に単位磁荷 (モノポール:N 極だけ S 極だけが単独で存在している状態) は存在しない」ということを示している式です。Maxwell の 4 つの式を眺めていると、ここの右辺にρ_mのような項が出てきたほうが電場と磁場の対応がきれいに見える…と思うかもしれませんね。だけどそれは人間の目の勝手な都合。$\mathrm{div}\vec{B} = 0$と考えた方が自然をとてもよく説明できるのです。

ほとんど、まとめるまでもないですが、

<table>
<tr><td>$\mathrm{div}\vec{B} = 0$
(磁場に対するガウスの法則)</td><td>$\leftarrow$ 単位磁荷は存在しない!ということを示す。
$\leftarrow$ 磁場の性質を定めている。
(応用する上では特に役立つ場面は…ない??)</td></tr>
</table>

ということになります。

それでは 3 つ目の式を見てみましょう。3 つ目は、

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

という式です。この式は「微分形のファラデーの法則」と呼ばれます。磁場が時間変化したら電場に渦が生まれるという「磁場の変化が電場に与える影響」について定めている式です。

この式の両辺を面積分したら、積分形のファラデーの法則に式変形することができます。敢えて微分形で書いているのは、ガウスの法則のときと同じく、この方が応用範囲が拡がるからです。

まとめておくと、

<table>
<tr><td>$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
(微分形のファラデーの法則)</td><td>$\xleftrightarrow{\text{(数学で変形)}} \Delta\phi = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$
(積分形のファラデーの法則)</td></tr>
<tr><td colspan="2">⇑
電場と磁場の影響の及ぼし合い方を定めている。</td></tr>
</table>

となります。

それでは電磁気学の基本方程式の最後の一つを見てみましょう。これです。

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{i} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

この式は「マクスウェル・アンペールの法則」と呼ばれています。最後の項 $\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ さえなければ、授業中にも扱った「微分形のアンペールの法則」

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{i}$$

になりますね。もともと観測結果として知られていた「磁場と電流の関係」はこのように $\mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ という項がない式でした。

だけど先に見た Faraday の法則によれば「磁場が時間変化したら電場に影響を与える」ようです。それならば「電場が時間変化したとき、磁場に影響を与えるのではないか?」と Maxwell は推理したのでしょう。電場の時間変化というのは、いってみれば“電流が流れたのと同じような効果”になりそうですね。そこで電場の時間変化を電流密度と同じように足し算してみました。

この

$$\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

の部分を“変位電流”と呼んでいます。

そしてこの変位電流の効果を「アンペールの法則」に加えるとどんなことが起きると予想されるのかといえば、この変位電流の項の影響で「電場と磁場が互いに影響を及ぼし合いながら伝播していく“電磁波”が発生する」ということになります。ここでもしいくら測定しても「電磁波は存在しない」ということになったら、この変位電流という考え方は間違っていたと判断するべきでしょう。だけど、現実は Maxwell が変位電流の項を付け加えてから数十年後、電磁波が存在していることが確かめられました。なので、これまで授業で扱っていた「アンペールの法則」だけでは不十分、より正確には変位電流のことを考慮にいれるべき…ということになります。

さて、このアンペールの法則 (および改良版アンペールの法則) は、「電流と磁場の間に成り立つ関係式」です。言い方を変えれば「この式によって磁場とはなにかが定められている」とも言えるでしょう。

そして微分形のアンペールの法則から、数学上の式変形を経て、より使いやすい積分形のアンペールの法則に書き換えることも可能です。そしてそれだけでなく、微分形のアンペールの法則を変形してビオ・サバールの法則の形にすることも可能です。微分形のガウスの法則に対して言ったのと同じ理由で、やはりアンペールの法則は微分形の方をより基本的な方程式と見なしましょう。

まとめておきます。

<table>
<tr><td rowspan="3">$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{i}$
(微分形アンペールの法則)
このままでは使いづらい</td><td>(数学で変形)</td><td>[応用する上で…]</td></tr>
<tr><td>$\leftrightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_A \vec{i} \cdot d\vec{S}$
(積分形アンペールの法則)</td><td>特定の状況において
磁場を楽に計算できる</td></tr>
<tr><td>$\leftrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$
(ビオ・サバールの法則)</td><td>どんな場合でも磁場を
計算可能。ただし大変</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\Downarrow$ $\Uparrow$
磁場と電流の関係について定めている式</td></tr>
<tr><td colspan="3">(変位電流を考慮に入れて改良!) マクスウェル・アンペールの法則
$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ → ファラデーの法則と合わせて、電磁波の発生を予言</td></tr>
</table>

と、こんな感じです。

大学 1 年生向けの講義では、この電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式の 4 つが歴史的にどのように発見されてきたかという順序で説明を受けることが多いようです。だけど古典電磁気学の体系としては、この 4 つの方程式が出発地点になります。どんな問題に対しても、まずこの Maxwell 方程式を立てて、状況に応じた条件を付けて方程式を変形して、解く…という流れです。みなさんもこの 4 つの方程式を出発地点として、今までの話であっても、より高度な話題であっても、挑戦して解いていくことができる…はずです。

話していないこと

この授業では話していない内容だけど電磁気学では大事な事柄として、ひとつは「電磁波の発生」についての考察が挙げられるでしょう。Maxwell 方程式から本当に電磁波が出るか、出るのはどんなときかなど知っておくと良いと思います。

また、上に書いた Maxwell 方程式はすべて真空中で成立する形で書きました。これを物体の中だとどう書き変わるのかということも、知っておくとよいでしょう。「物体中の電磁気学」の話題です。

そういった話をする時間はありませんでしたので、ぜひ他の教科書に当たって、勉強をしてみて欲しいと思います。

それでは半年に渡っての演習の授業、みなさまお疲れさまでした!

7.2 *おまけの問題

問題 31 (Gauss の定理)
次の等式を「ガウスの定理」と呼ぶ。

$$\int_V \mathrm{div}\vec{F}dv = \int_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

ここで、左辺は任意の立体 V 内での体積積分を表し、右辺はその立体の表面 S 上での面積分を表す。
このとき、

(1) 電場に関するガウスの法則の微分形: $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ から、積分形: $\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho dv$ を導け。
(2) 磁場に関するガウスの法則の積分形: $\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ から、微分形: $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ を導け。

* *
*
*

以前にもやりましたが、微分形のガウスの法則と積分形のガウスの法則の間を行き来する練習です。
そして次の問題は、アンペールの法則に対して、微分形と積分形を行き来する練習です。

*
* * *

問題 32 (Stokes の定理)
次の等式を「ストークスの定理」と呼ぶ。

$$\int_A \mathrm{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

ここで、左辺は任意の面 A 上での面積分を表し、右辺はその面の周 C に沿った線積分を表す。
このとき、

(1) アンペールの法則の微分形: $\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{i}$ から、積分形: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int_S \vec{i}\cdot d\vec{S}$ を導け。
(2) 電場に関する $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$ という等式から、微分形: $\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{0}$ を導け。

第8章　おまけ：鏡像法について

鏡像法というのは、導体が近くにあるときに電位と電場を求める手法のひとつです。たまに教科書に書いてあったり、講師によっては試験問題にしたりもするでしょうからいくつかパターン問題を練習しておきましょう。

8.1　鏡像法

導体の性質を簡単に思い出してみましょう。まず導体というのは「電荷 (自由電子) が自由に動き回れる」という性質がありますね。そういうものを導体と呼んでいるわけです。

電荷が自由に動き回れるとどういうことが起きるか…それは「導体内部に電場がない」という状況に繋がります。もしも電場があったとすると、電場の影響を受けて電荷がその電場を打ち消す位置に移動してしまって、結果として電場はなくなります。

そして電場がないということは、その領域内で電位が等しいということになりますね。だって 2 点間の電位差は、電場をその 2 点の間で積分して計算してましたが、電場 0 ならば、電位差も 0 になってしまいます。(電位が 0 になるのではありません。電位差が 0 になるだけです!)

導体の性質: 電荷 (電子) が自由に動き回れる。
||
導体内部に電場はない($\vec{E} = 0$)。
||
導体中、電位は等しい。

このことを先に確認した上で、鏡像法の話に入っていきます。

導体が存在しているときは、その導体の影響で、電位や電場を考えるのが大変になります。例えば無限に広い導体板の近くに点電荷を持ってきたとしましょう。導体が存在しないときは、点電荷がどんな電場・電位をつくるかわかっています。クーロンの法則でもガウスの法則でもどちらでも求めることができます。だけど導体が近くにあると、点電荷につられて、逆符号の電荷が導体の表面に集まってきます。導体が存在しているときの電位や電場を考えるときは、この導体表面に現れる電荷の影響も考慮に入れて、計算しなければなりません。

まあ真面目に、導体表面にどんな電荷分布が実現されるかを考えて、ちゃんとクーロンの法則で積分して…で計算することも不可能ではありません。だけど、かなり大変です。

その点「鏡像法」という考え方を使うと、やはり特定の場合に限りますが、とても楽に電場と電位を計算することができるのです。

では具体的にどうやるか。

鏡像法のキーポイントは「存在している導体の代わりに、導体があるときと同じ電位をつくるように架空の電荷 (鏡像電荷と呼ばれる) を空間に配置する」ということです。どんな量の電荷をどこに配置するかが、鏡像法の大事なところ。

導体があるのと同じ電位をつくると簡単に言っていますが、これはどうやって判断できるのか。全空間中の電位が同じになってるか確認できるくらいなら、導体が存在しているときの電位がすべてわかってるってことじゃないか!と思うかもしれませんね。実はここ「導体があるのと同じ電位をつくっているかどうか」の確認法には、手軽なものがあります。それは

導体があるのと同じ電位をつくる

$\uparrow$

導体の境界線上が等電位になれば良い

なぜこんなことが言えるかというと、これは“電位の一意性”と呼ばれる性質を使っています。これは「境界上で電位が同じになっている 2 つの状況同士では、境界以外の場所でも電位は等しくなる」という電位の特徴です。この電位の一意性については、電位が満たすポアソン方程式を考えて…とやっていくのですが、ちゃんと説明してくととても長くなってしまいます。数学で厳密に証明された性質だよ…ってことで、今日はこの結論だけ使わせてください。興味ある人は電磁気の教科書で調べてみてください。キーワードは「電位の一意性」。多くの教科書にちゃんと説明が載ってると思います。

さて電位の一意性によって「境界面での電位が等しい」状況になっていれば、境界以外の場所でも電位が等しくなることが保証されます。そして導体の性質「導体表面は等電位である」ことを利用しましょう。(境界以外の場所といっても、導体がない場所に限ります)

つまり、架空の電荷を配置するときには「その架空電荷を置くことによって、もともと導体の表面があった場所の電位が等電位になるように、架空電荷を配置する」わけです。それができたら全空間中の電位が簡単に計算できるという筋書きです。なんといっても、何個かの点電荷がつくる電位だったら、計算は楽ちんですよね。

導体あり　　　　　　　　架空の電荷

———————— ⇐ [境界面での電位が同じ] ⇒ - - - - - - -

⇓

↑　　　　　　　　　　　　↑

すべての領域で、電位はどちらも同じになる!!

手順をまとめておきましょう。

手順:

1. 導体は存在しないものとする。
2. 適当な鏡像電荷を配置する。
3. もともとの電荷＋鏡像電荷がつくる電位を計算する
4. 導体があったはずの面が、等電位になっているか確認
(→うまくいっていたら OK!)
5. もし等電位になっていなかったら、別の鏡像電荷を配置して確かめてみる。

ということです。

さて、どうやってもうまい鏡像電荷の配置が見つからないときはどうしましょうか? そのときは諦めましょう。この鏡像法が使えるかどうかは、鏡像電荷がうまく配置できるかどうかにかかっています。

なお、参考までに“導体表面に現れる総電荷量と鏡像電荷の総和が等しくなる”ことも、うまい配置の条件です。これも鏡像電荷を探すときの目安になりそうですね。つまり、配置する鏡像電荷の電荷をすべて足し算したものは、導体の外にある電荷の総量の符号違いになるわけです。

この鏡像法が使えるパターンというのは限られています。本当はもっとたくさんあるのかもしれませんが、私の経験では

- 無限に広い平面状の導体
- 球状の導体

しか聞いたことがありません。(別の問題があったら解法と合わせてぜひ教えてください)
そして一度やっておけば、どのあたりに電荷を配置すればうまくいきそうか、予想が上手になると思います。

8.2 *問題練習

それでは、実際に使ってみましょう。どんな鏡像電荷を置いたら良いのか、いろいろ考えてみてください。…といっても、典型的なパターンしか出題していませんけど。

問題 33 (鏡像法)

x-y 平面に無限に広い導体がある。

このとき x-y 平面から ℓ だけ離れた点に $+q$ の電荷を設置したとする。

鏡像法を用いて、この電荷にかかる力 $\vec{F}$ を求めたい。

(1) 鏡像法を用いるために、架空の鏡像電荷を配置させる。どこに、どれだけの電荷を配置したらよいだろうか? 思いついた場所と電荷の大きさを答えよ。

(2) (1) で考えた鏡像電荷がある場合の電位を求めよ。また、その結果を用いて x-y 平面の電位はどうなっているか?

(3) 鏡像法を用いて、この電荷に掛かる力 $\vec{F}$ を求めよ。

＊＊
＊
＊

どこに電荷を配置させましょうか?
勘の良い人ならばすぐわかってしまうかもしれません。これは、導体の表面を鏡と思って、鏡の像に相当する位置に配置するとうまくいきます。これが「鏡像電荷」と呼ばれる所以ですね。
実際に手を動かして、導体表面があった場所が等電位になっていることを確認してみてください。
それができたら、電位を微分すれば電場が求められて、電場に電荷を掛け算すれば力が求められる…と普段と同じやり方で (3) は求められます。
このような無限に拡がっている導体板の問題が、一番の基本だと思います。次からちょっと応用してみましょう。

＊
＊＊＊

問題 34 (鏡像法 2)

$x < 0$ の領域と $y < 0$ の領域が、無限に広い導体で埋めつくされている。

点 $\mathrm{P}(a, a, 0)$ $(a > 0)$ に点電荷 $+q$ を置いたとき、x-y 平面上の第一象限 ($x > 0$ かつ $y > 0$ の領域) の電位 $\phi(x, y)$ を求めよ。

＊＊
＊
＊

ちょっと変えてみたけど、無限に広い導体とほとんど同じですね。
鏡像電荷の配置場所などは、考えてみてください。注意として「鏡像電荷の総電荷量と、導体の表面に現れる電荷の総量が同じになる」って条件も思い出すようにしましょう。

＊
＊＊＊

問題 35 (鏡像法 3)

無限に広い平面状の導体がある。その上方に金属球を絶縁体のバネ (自然長 ℓ、バネ定数 k) で天井から吊るした。このときの金属球と導体との距離は h だった。

(1) この金属球に電荷 Q を与えるとバネの伸びはどうなるか？(伸びる、縮む、変わらない で答えよ)

(2) 金属球に電荷を与えたら、バネの伸びの変化は x であった。このとき、金属球に与えた電荷 Q を求めよ。なお、金属球の重さによる伸びについては気にしなくてよい。

* *
* テスト問題用に無駄に複雑にしてみました。バネは釣り合いの位置から x だけ
* 伸び縮みしたら、元に戻る方向に kx だけの力 (復元力) が発生します。

*
* * *

問題 36 (鏡像法:球状の導体のパターン)

半径 R の球状の導体があり、それを接地しておく。

その導体球の中心か r $(r > R)$ だけ離れた位置に点電荷 q と配置した。このとき、鏡像電荷をどこに配置したら良いだろうか?

(1) 導体球の中心があった場所から a だけ離れた位置に q' という電荷を配置したとして、周囲にできる電位を求めよ。

(2) アポロニウス定理という数学上の定理がある。それは「ある 2 点 A, B があり、その 2 点からの距離をそれぞれ r_A, r_B と書いたとして、

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{a}{b}$$

という関係を満たす点の集合は、線分 $\bar{AB}$ を $a : b$ で内分する点と、$a : b$ で外分する点の両方を通る球面になる」という定理である。このことを利用して、鏡像電荷の置き場所と電荷の量を定めよ。

* *
* ちょっと問題の作り方が雑なので、他の本も参考にする必要があるかもしれま
* せん。

とにかく球状の導体のパターンではアポロニウス定理が鍵になります。そして鏡像電荷の場所と電荷量を決めるのは「導体表面があった場所の電位が等しくなる」ことがポイントです。

*
* * *

＊奥付＊

取り扱い店	［物理屋さん］山本屋 http://www.th.phys.titech.ac.jp/~yamamoto/butsuriya/index.html
書名	問題を解くための物理の教科書 (電磁気)
筆者	山本明　(mail: yamamoto@th.phys.titech.ac.jp)
価格	読んだ方がご判断ください (投げ銭⇓受け付け中)
発行日	2005 年 2 月 18 日
データ作成日	2006 年 1 月 28 日 18 時 22 分

この記事をお楽しみ頂けましたか?
特に満足された方は、筆者への 投げ銭 をご検討ください。

投げ銭は、こちらの銀行口座へ…

銀行名	新生銀行
支・本店	本店
口座名義	山本明
口座名義 (読み)	ヤマモトアキラ
口座種別	普通
口座番号	0444677

ほのかに期待しております。